Matematica Finanziaria

15 Gennaio 2003

Cognome e Nome: ....

Matricola: .... Anno di Corso: .... Firma: ....

1. In data odierna la struttura dei tassi a pronti osservata è riportata nella seguente tabella:

k	$i(0,k)$
0.5	0.030688758
1	0.028806584
1.5	0.01632698
2	0.031421246

   a. Verificare se è possibile effettuare un arbitraggio non rischioso;

   b. in caso affermativo, descrivere la strategia di arbitraggio ed il guadagno che si realizzerebbe in $t = 0$ per ogni euro di valore facciale del portafoglio di arbitraggio.

2. Il fondo obbligazionario `Reddito Fisso Italia` è composto dai seguenti titoli:

   - BTP `IT00012463782`, cedola $c_1 = 5\%$ annuale, scadenza $m_1 = 2.3$ anni, rateo $R_1 = 0.3\%$, duration $D_1 = 2.184$ anni, valore facciale $h_1 = 1{,}800{,}000$ €;
   - BTP `IT00023748292`, cedola $c_2 = 6\%$ annuale, scadenza $m_2 = 1.8$ anni, rateo $R_2 = 0.8\%$, duration $D_2 = 1.717$ anni, valore facciale $h_2 = 2{,}300{,}000$ €.

   Si ipotizzi una struttura dei tassi costante pari a $i = 3\%$.

   a. Determinare il valore di mercato e la dollar duration del portafoglio;

   b. ipotizzando che sia atteso un aumento dei tassi, si determini la posizione da assumere in contratti future sul bund, dove il fattore di conversione del CTD è $CF_{CTD} = 0.976$ e la sua dollar duration è $DD_{CTD} = 5.4$ anni.

3. Il Signor Provenzano ha deciso di vincolare in un deposito a 10 anni una somma pari a 100,000 €. Gli accordi contrattuali prevedono che la somma depositata sia capitalizzata secondo i seguenti tassi:

   - $i(0, 2) = 1\%$ semestrale;
   - $i(2, 6) = 5\%$ annuale;
   - $i(6, 10) = 1.5\%$ trimestrale.

   Determinare:

   a. Il montante alla fine del periodo contrattuale;

   b. il capitale addizionale da depositare nel caso in cui il montante finale debba essere pari a 180,000 €;

   c. il tasso annuo equivalente per il modello esponenziale e per il modello lineare d'interesse.

4. Il Signor Pecorella ha richiesto un mutuo a rata costante per un ammontare pari a 100,000 € pagabile in quattro anni con rata semestrale. Il tasso praticato dall'istituto di credito è $i = 3.5\%$ su base annuale. Determinare:

   a. la rata;

   b. il piano d'ammortamento;

   c. di quanti anni è necessario estendere il prestito nel caso in cui la rata semestrale deve essere minore od uguale a 10,000 €.

Matematica Finanziaria

Testo e Risultati

15 Gennaio 2003

1. In data odierna la struttura dei tassi a pronti osservata è riportata nella seguente tabella:

k	$i(0,k)$
0.5	0.030688758
1	0.028806584
1.5	0.01632698
2	0.031421246

a. Verificare se è possibile effettuare un arbitraggio non rischioso;

b. in caso affermativo, descrivere la strategia di arbitraggio ed il guadagno che si realizzerebbe in $t = 0$ per ogni euro di valore facciale del portafoglio di arbitraggio.

Risposta:

a. Analizzando la struttura dei **prezzi a pronti** si rileva che tale struttura non è decrescente. In particolare,

k	$B(0,k)$	$i(0,k)$
0.5	0.985	0.030688758
1	**0.972**	**0.028806584**
1.5	**0.976**	**0.01632698**
2	0.94	0.031421246

b. La strategia che permette di realizzare un guadagno non rischioso è data da:

A: vendita allo scoperto in 0 dello ZCB con scadenza in $k = 1.5$;

B: acquisto in 0 dello ZCB con scadenza in $k = 1$;

C: acquisto in $k = 1$ di uno ZCB con scadenza in $k = 1.5$.

La tabella dei payoff ed il guadagno per ogni euro di valore facciale sono riportati di seguito. Si osservi che non è necessario conoscere il prezzo futuro di $B(1, 1.5)$ per essere sicuri di realizzare un arbitraggio in quanto sicuramente $B(1, 1.5) < 1$.

0	1	1.5
0.976		-1
-0.972	1	
	$-B(1, 1.5)$	1
0.004	> 0	0

2. Il fondo obbligazionario `Reddito Fisso Italia` è composto dai seguenti titoli:

- BTP `IT00012463782`, cedola $c_1 = 5\%$ annuale, scadenza $m_1 = 2.3$ anni, rateo $R_1 = 0.3\%$, duration $D_1 = 2.184$ anni, valore facciale $h_1 = 1{,}800{,}000$ €;
- BTP `IT00023748292`, cedola $c_2 = 6\%$ annuale, scadenza $m_2 = 1.8$ anni, rateo $R_2 = 0.8\%$, duration $D_2 = 1.717$ anni, valore facciale $h_2 = 2{,}300{,}000$ €.

Si ipotizzi una struttura dei tassi costante pari a $i = 3\%$.

a. Determinare il valore di mercato e la dollar duration del portafoglio;

b. ipotizzando che sia atteso un aumento dei tassi, si determini la posizione da assumere in contratti future sul bund, dove il fattore di conversione del CTD è $CF_{CTD} = 0.976$ e la sua dollar duration è $DD_{CTD} = 5.4$ anni.

Risposta:

a. I calcoli necessari per determinare il prezzo dei due titoli sono riportati nelle tabelle di seguito:

t	$c_1/2$	$(1+i)^{-t}$	$c_1/2 \cdot (1+i)^{-t}$
0.3	0.025	0.991171561	0.024779289
0.8	0.025	0.976630359	0.024415759
1.3	0.025	0.962302486	0.024057562
1.8	0.025	0.948184814	0.02370462
2.3	1.025	0.934274259	0.957631115
			1.054588346

0	$c_2/2$	$(1+i)^{-t}$	$c_2/2 \cdot (1+i)^{-t}$
0.3	0.03	0.991171561	0.029735147
0.8	0.03	0.976630359	0.029298911
1.3	0.03	0.962302486	0.028869075
1.8	0.03	0.948184814	0.976630359
			1.064533491

Il valore di mercato del portafoglio è dato dalla somma dei valori di mercato dei singoli titoli in portafoglio. Si ricorda che il valore di un titolo deve tenere conto dell'eventuale rateo, quindi,

$$\bar{\Pi}(0) = 1800000 \cdot (1.054588346 + 0.003) + 2300000 \cdot (1.064533491 + 0.008) = 4{,}370{,}486.05\,€.$$

La dollar duration dei singoli titoli si ottiene moltiplicando il prezzo tel quel per la rispettiva duration, da cui,

$$DD(0, \bar{V}_1) = (1.054588346 + 0.003) \cdot 2.184 = 2.310013789$$
$$DD(0, \bar{V}_2) = (1.064533491 + 0.008) \cdot 1.717 = 1.841560266.$$

La dollar duration del portafoglio è data dalla somma pesata delle duration dei singoli titoli. I pesi si ottengono rapportando il valore di mercato del singolo titolo al valore complessivo del portafoglio, quindi,

$$u_1 = \frac{1800000 \cdot (1.054588346 + 0.003)}{4370486.05} = 0.435571467$$
$$u_2 = \frac{2300000 \cdot (1.064533491 + 0.008)}{4370486.05} = 0.564428533.$$

La dollar duration è data da,

$$DD(0, \bar{\Pi}) = 0.435571467 \cdot 2.310013789 + 0.564428533 \cdot 1.841560266 = 2.05$$

b. Un aumento dei tassi determina una riduzione dei prezzi e, di conseguenza, una perdita di valore del fondo. La posizione in futures deve beneficiare di tale riduzione, quindi è necessario assumere una posizione short. Per ogni unità di valore facciale del portafoglio sarà necessario vendere α unità di valore facciale del future, dove

$$\alpha = \frac{2.05}{5.4} \cdot 0.976 = 0.369724209.$$

(Si ricorda che l'hedge ratio è dato dal rapporto fra la duration del portafoglio e quella del titolo CTD, moltiplicato per il fattore di conversione del CTD). Ricordando che il valore facciale di un contratto future è pari a 100,000 €, e che il valore facciale del portafoglio è pari a $1800000 + 2300000 = 4{,}100{,}000$ €, il numero di contratti future da vendere è dato da,

$$n_f = \frac{4100000}{100000} \cdot 0.369724209 = 15.15869257 \simeq 15.$$

3. Il Signor Provenzano ha deciso di vincolare in un deposito a 10 anni una somma pari a 100,000 €. Gli accordi contrattuali prevedono che la somma depositata sia capitalizzata secondo i seguenti tassi:

- $i(0, 2) = 1\%$ semestrale;
- $i(2, 6) = 5\%$ annuale;
- $i(6, 10) = 1.5\%$ trimestrale.

Determinare:

a. Il montante alla fine del periodo contrattuale;

b. il capitale addizionale da depositare nel caso in cui il montante finale debba essere pari a 180,000 €;

c. il tasso annuo equivalente per il modello esponenziale e per il modello lineare d'interesse.

Risposta:

a. Si osservi che i tassi sono su base diversa: trimestrale, semestrale ed annuale. In questi casi si può o riportare i tassi in un'unica base e poi effettuare il calcolo del montante, oppure, comporre i tassi periodali per il numero di periodi effettivi. Per esempio, il tasso annuo equivalente per il tasso trimestrale i_4 è dato da,

$$i = (1 + i_4)^4 - 1.$$

Il montante per un periodo di quattro anni, per un euro di capitale, è dato da,

$$(1 + i)^4 = [1 + (1 + i_4)^4 - 1]^4 = (1 + i_4)^{16}.$$

Per il problema in esame si ha,

$$M(0, 10) = 100000 \cdot (1 + 0.01)^4 \cdot (1 + 0.05)^4 \cdot (1 + 0.015)^{16} = 160{,}508.99\,€.$$

b. Il capitale addizionale da depositare non è altro che la differenza fra il valore attuale del capitale finale (180,000 €) ed il capitale disponibile (100,000 €), quindi,

$$V(0, 10) = 180000 \cdot \left[(1 + 0.01)^4 \cdot (1 + 0.05)^4 \cdot (1 + 0.015)^{16}\right]^{-1} = 112{,}143.25\,€$$
$$112143.25 - 100000 = 12{,}143.25\,€.$$

c. Per la definizione di tassi equivalenti, nel caso di modello esponenziale si ottiene,

$$i(0, 10) = \left[(1 + 0.01)^4 \cdot (1 + 0.05)^4 \cdot (1 + 0.015)^{16}\right]^{1/10} - 1 = 0.048455342.$$

Per i modello lineare si ha,

$$i(0, 10) = \frac{(1 + 0.01)^4 \cdot (1 + 0.05)^4 \cdot (1 + 0.015)^{16} - 1}{10} = 0.060508992.$$

4. Il Signor Pecorella ha richiesto un mutuo a rata costante per un ammontare pari a 100,000 € pagabile in quattro anni con rata semestrale. Il tasso praticato dall'istituto di credito è $i = 3.5\%$ su base annuale. Determinare:

a. la rata;

b. il piano d'ammortamento;

c. di quanti anni è necessario estendere il prestito nel caso in cui la rata semestrale deve essere minore od uguale a 10,000 €.

Risposta:

a. Il problema richiede una rata semestrale quindi, dato che il tasso è su base annuale, è necessario determinare il tasso semestrale equivalente, i', ed il numero di periodi della rendita, m',

$$i' = (1 + 0.035)^2 - 1 = 0.017349497 \qquad m' = 4 \cdot 2 = 8.$$

La rata è data da,

$$R = \frac{100000}{a_{\overline{m'}|i'}} = 13{,}495.49\,€ \quad \text{dove}$$
$$a_{\overline{m'}|i'} = \frac{1 - (1 + 0.017349497)^{-8}}{0.017349497} = 7.409884496.$$

b. Il piano di ammortamento è riportato nella seguente tabella:

k	C_k	I_k	R_k	D_k
0	-	-	-	100000
1	11760.53727	1734.94975	13495.48702	88239.46273
2	11964.57668	1530.91034	13495.48702	76274.88605
3	12172.15607	1323.33094	13495.48702	64102.72998
4	12383.33686	1112.15015	13495.48702	51719.39311
5	12598.18154	897.30548	13495.48702	39121.21158
6	12816.75365	678.733361	13495.48702	26304.45792
7	13039.11789	456.369126	13495.48702	13265.34003
8	13265.34003	230.146983	13495.48702	0.0

c. In questo caso l'incognita è il numero di anni cui bisogna estendere il mutuo affinchè la rata semestrale sia minore o uguale a 10,000 €, quindi deve essere,

$$\frac{100000}{a_{\overline{x}|i'}} \leq 10000.$$

Si noti che l'incognita x è espressa in semestri, quindi la soluzione della disequazione è il numero totale di semestri che determinano una rata semestrale minore di 10,000 €. Risolvendo la precedente disequazione con il segno di uguaglianza, con semplici passaggi algebrici si ha che,

$$x = -\frac{\ln\left[1 - 0.017349497 \cdot \frac{100000}{10000}\right]}{\ln(1 + 0.017349497)} = 11.07798715$$

Chiaramente, essendo il numero di semestri un numero intero, la la soluzione è 11 o 12. Si verifica facilmente che con un numero di semestri pari a 12 la rata è $R = 9{,}302.71$ €, quindi è necessario estendere il prestito di $12 - 8 = 4$ semestri, ovvero 2 anni.