Matematica Finanziaria

9 Dicembre 2002

Cognome e Nome: ....

Matricola: .... Anno di Corso: .... Firma: ....

1. Il Sig. Basile decide di accantonare una somma mensile per $n = 10$ anni in modo da garantire gli studi ai propri figli. Supposto che il tasso annuale sia pari a $i = 5\%$ e che per gli studi siano necessari $S = 100{,}000$ €, determinare:

   a. la rata mensile;

   b. il numero di anni di cui deve essere esteso l'accantonamento affinchè la rata non sia maggiore di 500 €.

2. In $t = 0$ la struttura dei prezzi a pronti è $B(0, 0.5) = 0.987$, $B(0, 1) = 0.968$, $B(0, 1.5) = 0.95$, $B(0, 2) = 0.932$. Determinare:

   a. la struttura dei tassi e delle intensità a pronti;

   b. la struttura dei tassi e delle intensità a termine uniperiodali;

   c. la struttura dei tassi di parità.

3. Per un investimento a 32 giorni la Aristodemo SGR ha selezionato i seguenti titoli:

   1) un T-bill [Act/360] quotato a $p_1 = 99.7$;

   2) un BOT [Act/365] quotato a $p_2 = 99.8$.

   Determinare:

   a. il rendimento dei due titoli su base annuale;

   b. il titolo con rendimento maggiore e la differenza in basis point.

4. La Banca di Cipponeri ha in portafoglio 100,000 € di valore facciale del BTP `IT00044567334`. Il prezzo corrente di tale BTP è $p_1 = 101.83$, mentre la sua duration è pari a $D_1 = 1.2$. Per proteggersi da shift della struttura dei tassi, i gestori del portafoglio decidono di costruire un portafoglio di hedging self–financing. Gli analisti hanno individuato due possibili titoli le cui caratteristiche sono riportate di seguito:

   1) BTP `IT00034364371`, cedola $c_2 = 10\%$ annuale, scadenza $m_2 = 2$ anni, yield–to–maturity $y_2 = 3\%$ annuale;

   2) BTP `IT00026177490`, cedola $c_3 = 7\%$ annuale, scadenza $m_3 = 1.4$ anni, yield–to–maturity $y_3 = 4\%$ annuale.

   Determinare:

   a. il prezzo e la duration flat dei BTP `IT00034364371` ed `IT00026177490`;

   b. il valore facciale dei titoli componenti il portafoglio di hedging, specificando se si tratta di una posizione lunga o corta.

Matematica Finanziaria

Testo e Risultati

09 Dicembre 2002

1. Il Sig. Basile decide di accantonare una somma mensile per $n = 10$ anni in modo da garantire gli studi ai propri figli. Supposto che il tasso annuale sia pari a $i = 5\%$ e che per gli studi siano necessari $S = 100{,}000$ €, determinare:

   a. la rata mensile;

   b. il numero di anni di cui deve essere esteso l'accantonamento affinchè la rata non sia maggiore di 500 €.

   Risposta:

   a. La somma necessaria per gli studi dei figli è pari a 100,000 €, quindi $V(n)$ è noto. Essendo una rendita frazionata, riportiamo tutti i parametri su base mensile, quindi $n' = 10 \cdot 12 = 120$ mesi, $i' = (1 + 0.05)^{1/12} - 1 = 0.004074124$. La rata è data da:

   $$R = \frac{100000}{s_{\overline{n}|i'}} = 647.8229596,$$

   dove,

   $$s_{\overline{n}|i'} = \frac{(1 + 0.004074124)^{120} - 1}{0.004074124} = 154.3631613.$$

   b. Il numero di rate aggiuntive, e quindi il numero di anni, si ottiene risolvendo per x la seguente disequazione:

   $$\frac{100000}{s_{\overline{x}|i'}} \leq 500,$$

   da cui si ottiene che per

   $$x > \frac{\ln[(0.004074124 \cdot 100000 + 500)/500]}{\ln(1 + 0.004074124)} = 146.5841947,$$

   la rata è minore di 500 €. In particolare, se $x = 147$, quindi per un numero di anni aggiuntivo pari a $(147 - 120)/12 = 2.25$, la rata è pari a 498.1227803 €.

2. In $t = 0$ la struttura dei prezzi a pronti è $B(0, 0.5) = 0.987$, $B(0, 1) = 0.968$, $B(0, 1.5) = 0.95$, $B(0, 2) = 0.932$. Determinare:

   a. la struttura dei tassi e delle intensità a pronti;

   b. la struttura dei tassi e delle intensità a termine uniperiodali;

   c. la struttura dei tassi di parità.

   Risposta:

   a. Per $t = 2$, i tassi e le intensità a pronti sono date da,

   $$\begin{aligned} i(0,2) &= \left(\frac{1}{0.932}\right)^{1/2} - 1 = 0.035838488 \\ \delta(0,2) &= -\frac{\ln 0.932}{2} = 0.035211232 \text{ anni}^{-1}. \end{aligned}$$

   Per i rimanenti periodi si verifica facilmente che,

t	$i(0,t)$	$\delta(0,t)$
0.5	0.026516	0.02617
1	0.033058	0.032523
1.5	0.034787	0.034196
2	0.035838	0.035211

b. Per $t = 2$, i tassi e le intensità a termine sono date da,

$$\begin{aligned} i(0,1.5,2) &= \left(\frac{1}{0.981052632}\right)^{1/0.5} - 1 = 0.038999613 \\ \delta(0,2) &= \frac{2 \cdot 0.035211232 - 1.5 \cdot 0.03419553}{0.5} = 0.03825834 \text{ anni}^{-1}, \end{aligned}$$

dove, $B(0,1.5,2) = 0.932/0.95 = 0.981052632$.
Per i rimanenti periodi si verifica facilmente che,

t	$i(0,t-1,t)$	$\delta(0,t-1,t)$
0.5	0.026516	0.02617
1	0.039641	0.038876
1.5	0.038254	0.03754
2	0.039	0.038258

c. Per $t = 2$, il tasso di parità è dato da,

$$c(0,2) = \frac{1 - 0.932}{0.987 + 0.968 + 0.95 + 0.932} = 0.017722179.$$

Per i rimanenti periodi si ha che,

t	$c(0,t)$
0.5	0.013171
1	0.016368
1.5	0.017212
2	0.017722

3. Per un investimento a 32 giorni la Aristodemo SGR ha selezionato i seguenti titoli:

1) un T-bill [Act/360] quotato a $p_1 = 99.7$;
2) un BOT [Act/365] quotato a $p_2 = 99.8$.

Determinare:

a. il rendimento dei due titoli su base annuale;
b. il titolo con rendimento maggiore e la differenza in basis point.

Risposta:

a. Si ricorda che il T-bill è un titolo di puro sconto, mentre il BOT è un titolo in cui l'interesse è corrisposto alla scadenza. I due titoli hanno anche basi diverse, quindi il confronto fra i due tassi può essere effettuato dopo un opportuno cambiamento di base. Il tasso relativo al BOT è un tasso d'interesse, quindi,

$$i = \frac{100 - 99.8}{99.8} \cdot \frac{365}{32} = 0.022858216.$$

Il tasso relativo al T-bill è un tasso di sconto, quindi,

$$d = \frac{100 - 99.7}{100} \cdot \frac{360}{32} = 0.03375.$$

b. Per effettuare il confronto fra i due tassi è necessario convertire il tasso di sconto in tasso d'interesse, o viceversa. Se si sceglie di convertire il tasso d'interesse del BOT nell'equivalente tasso di sconto si ha che,

$$d_{BOT} = \frac{0.022858216}{1 + 0.022858216 \cdot \frac{32}{365}} = 0.0228125.$$

Essendo il tasso d_{BOT} su base 365, affinchè sia confrontabile con il tasso d, è necessaria una conversione da base 365 a base 360, quindi,

$$d_{BOT}^{360} = 0.0228125 \cdot \frac{360}{365} = 0.0225.$$

L'investimento in T-bill è più conveniente in quanto $d > d_{BOT}^{360}$, e la differenza è di circa $0.03375 - 0.0225 = 112$ basis point.

4. La Banca di Cipponeri ha in portafoglio 100,000 € di valore facciale del BTP `IT00044567334`. Il prezzo corrente di tale BTP è $p_1 = 101.83$, mentre la sua duration è pari a $D_1 = 1.2$. Per proteggersi da shift della struttura dei tassi, i gestori del portafoglio decidono di costruire un portafoglio di hedging self–financing. Gli analisti hanno individuato due possibili titoli le cui caratteristiche sono riportate di seguito:

1) BTP `IT00034364371`, cedola $c_2 = 10\%$ annuale, scadenza $m_2 = 2$ anni, yield–to–maturity $y_2 = 3\%$ annuale;
2) BTP `IT00026177490`, cedola $c_3 = 7\%$ annuale, scadenza $m_3 = 1.4$ anni, yield–to–maturity $y_3 = 4\%$ annuale.

Determinare:

a. il prezzo e la duration flat dei BTP `IT00034364371` ed `IT00026177490`;
b. il valore facciale dei titoli componenti il portafoglio di hedging, specificando se si tratta di una posizione lunga o corta.

Risposta:

a. Il prezzo dei due BTP si ottiene attualizzando le cedole future, più il valore facciale, al tasso pari al rispettivo YTM. Allo stesso modo si procede per la determinazione della FYD. Nelle seguenti tabelle sono riportati i calcoli necessari per la determinazione dei prezzi e delle duration flat.

Titolo 2:

t	c_t	$(1+y_2)^{-t}$	$c_t\,(1+y_2)^{-t}$	d_t	$t\,d_t$
0.5	0.05	0.985329278	0.049266464	0.043392531	0.021696265
1	0.05	0.970873786	0.048543689	0.042755931	0.042755931
1.5	0.05	0.956630367	0.047831518	0.042128671	0.063193006
2	1.05	0.942595909	0.989725705	0.871722867	1.743445735
			1.135367376	1	**1.871090937**

Titolo 3:

t	c_t	$(1+y_3)^{-t}$	$c_t\,(1+y_3)^{-t}$	d_t	$t\,d_t$
0.4	0.035	0.984434135	0.034455195	0.032878896	0.013151558
0.9	0.035	0.965317089	0.033786098	0.03224041	0.029016369
1.4	1.035	0.946571284	0.979701278	0.934880694	1.308832972
			1.047942571	1	**1.351000899**

b. Il portafoglio di hedging, self–financing, si ottiene risolvendo il sistema di due equazioni e due incognite che scaturisce imponendo il vincolo di bilancio ed il vincolo sulle duration. In particolare, per un euro di valore facciale, si ha che,

$$\begin{aligned} 1.135367376 \cdot \alpha + 1.047942571 \cdot \beta &= 1.0183 \\ 1.135367376 \cdot 1.871090937 \cdot \alpha + 1.047942571 \cdot 1.351000899 \cdot \beta &= 1.0183 \cdot 1.2, \end{aligned}$$

da cui si ricava che $\alpha = -0.260399611$ e $\beta = 1.253837051$. Il portafoglio è composto da una posizione nel BTP `IT00034364371` pari a $-0.260399611 \cdot 100000 = -29{,}564.92$ €. Dato che si sta effettuando la copertura di una posizione lunga con una posizione corta nel portafoglio di hedging, posizioni negative all'interno del portafoglio di hedging indicano una posizione lunga, quindi si procederà all'acquisto di 29,564.92 € di valore facciale del titolo `IT00034364371`. Per quanto riguarda il titolo `IT00026177490`, si procederà alla vendita allo scoperto di $1.253837051 \cdot 100000 = 131{,}394.92$ € di valore facciale