Esperienza 3

Equilibrio statico sul piano inclinato

Obiettivi - Comprendere la differenza tra grandezze vettoriali e grandezze scalari attraverso lo studio delle condizioni di equilibrio statico di un oggetto posto sopra un piano inclinato.

Concetti - Calcolo vettoriale; equilibrio delle forze; I e III principio di Newton; forza peso e forza normale.

Materiali e Strumenti - Piano inclinato; carrellino; n. 2 dinamometri con portata di 10 N ed errore di sensibilità di 0.1 N; riga graduata; sostegni e mollette.

3.1 Cenni teorici

Si dispone un piano inclinato in modo da formare un angolo θ fissato rispetto al piano orizzontale, come mostrato in Figura 3.1. L'angolo θ può essere direttamente misurato con un goniometro, oppure può essere calcolato facendo il rapporto tra l'altezza h e la lunghezza l del piano inclinato e calcolando quindi la funzione inversa

$$\theta = \arcsin(h/l)\,. \tag{3.1}$$

Costruito il piano inclinato, si pone sopra di esso un carrellino di massa m, tenuto fermo da una funicella. Se il carrellino rimane fermo, allora per il I principio della dinamica la somma di tutte le forze che agiscono sul carrellino deve essere nulla (supponiamo che il carrellino sia puntiforme e che tutti gli attriti siano trascurabili). In Figura 3.1 sono indicate tutte le forze che agiscono sul carrellino.

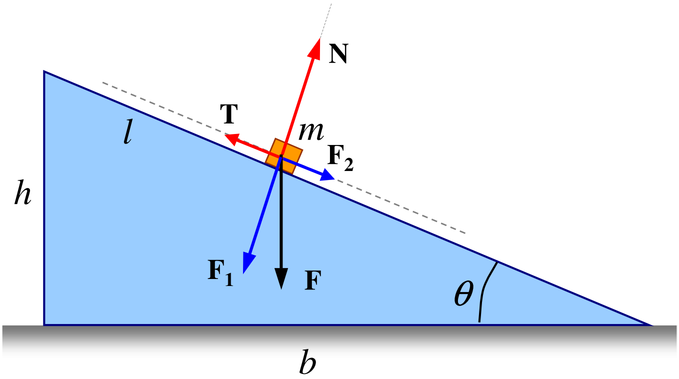

Figura 3.1: Forze agenti su un corpo in equilibrio posto sopra un piano inclinato, in assenza di forze di attrito tra corpo e piano.

Viene spontaneo chiedersi: ≪la forza $\vec{T}$ equilibra perfettamente la forza peso $\vec{F}$ del carrello?≫ Ovviamente, la risposta è: ≪no≫. Affinché il carrellino posto sul piano inclinato rimanga in equilibrio statico, la somma vettoriale di tutte le forze, in ogni direzione, deve essere zero. Quindi, nel nostro caso si deve avere

$$\vec{N} + \vec{T} + \vec{F} = 0\,. \tag{3.2}$$

Se consideriamo che

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2\,, \tag{3.3}$$

l'Eq. (3.2) diviene

$$\vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0\,. \tag{3.4}$$

Un'equazione vettoriale è equivalente a tante equazioni scalari quante sono le dimensioni dei vettori che compaiono nell'equazione. Nel nostro caso, i vettori sono bidimensionali e quindi l'Eq. (3.4) si riduce al seguente sistema di equazioni scalari

$$\begin{cases} N - F_1 = 0 \\ T - F_2 = 0\,. \end{cases} \tag{3.5}$$

Da questo sistema si ricava che l'intensità di $\vec{N}$ è uguale all'intensità di $\vec{F}_1$ e che l'intensità di $\vec{F}_2$ è uguale a quella di $\vec{T}$.

L'esperimento proposto consiste nel misurare con il dinamometro l'intensità delle forze $\vec{F}$ e $\vec{T}$, calcolare con la trigonometria l'intensità di $\vec{F}_2$ e confrontare quindi l'intensità di $\vec{F}_2$ con l'intensità di $\vec{T}$.

L'esperimento può essere ripetuto cambiando l'angolo θ che il piano inclinato forma con l'orizzontale, oppure aggiungendo dei pesetti al carrellino.

3.2 Attività, misure e calcoli

Nell'esperimento che abbiamo realizzato, il piano inclinato ha una lunghezza $l = 27.0$ cm, una base $b = 21.5$ cm e un'altezza $h = 16.5$ cm e forma un angolo

$$\theta = \arcsin(h/l) = \arcsin(16.5/27.0) = 37.7^\circ \,. \tag{3.6}$$

Si misura con il dinamometro l'intensità della forza peso $\vec{F}$ del carrello; nel nostro caso il valore è $F = (9.0 \pm 0.1)$ N. Il valore fornito dal dinamometro è quello per cui la forza elastica del dinamometro equilibra la forza peso del carrellino. Si pone il carrellino sopra il piano inclinato e si collega a un dinamometro per mezzo di una fune inestensibile e di massa trascurabile, rispetto alla massa del carrellino stesso. Il dinamometro segna una forza $T = (5.0 \pm 0.1)$ N, che risulta essere minore del peso del carrellino precedentemente misurato.

Come si vede dalla Figura 3.1, le forze $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$ sono i componenti della forza peso $\vec{F}$, uno perpendicolare al piano inclinato e l'altro parallelo; $\vec{N}$ è la forza di reazione vincolare del piano inclinato che è a esso perpendicolare, ma di verso opposto a $\vec{F}_1$; infine, $\vec{T}$ è la forza esercitata dal dinamometro sul carrellino.

Conoscendo il valore di $\vec{F}$, possiamo calcolare l'intensità di $\vec{F}_2$

$$F_2 = F\sin(\theta) = 9.0 \times \sin(37.7) = 5.5 \text{ N} \,. \tag{3.7}$$

L'intensità di $\vec{F}_2$ può essere calcolata sfruttando le proprietà dei triangoli simili, in quanto il triangolo formato dai lati del piano inclinato è simile al triangolo formato dalle forze $\vec{F}$, $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$. Quindi, si ha

$$h : l = F_2 : F \,, \tag{3.8}$$

da cui si ricava

$$F_2 = F\,\frac{h}{l} = 9.0 \times \frac{16.5}{27.0} = 5.5 \text{ N} \,. \tag{3.9}$$

Il valore ottenuto, coi due metodi, è molto vicino al valore misurato di $T = 5$ N.

3.3 Conclusioni

- Il corpo sopra il piano inclinato è in equilibrio statico sostenuto dalla forza elastica del dinamometro e dalla forza normale esercitata dal piano inclinato.

- Il rapporto tra forza del dinamometro parallela al piano e forza peso del carrellino è uguale al rapporto tra altezza e lunghezza del piano inclinato; di fatto h/l è proprio per definizione $\sin(\theta)$.
- Il rapporto tra forza normale, esercitata dal piano inclinato, e forza peso dell'oggetto è uguale al rapporto tra base e lunghezza del piano inclinato.

La buona riuscita dell'esperienza dipende da quanto sia trascurabile la forza di attrito tra carrellino e piano inclinato, che rappresenta un'importante fonte d'errore.

Emilio Fiordilino, Aurelio Agliolo Gallitto, *Il laboratorio di fisica nel Progetto 'Lauree Scientifiche'*, Aracne, Roma 2010.

Curiosità. *Il principio fisico del cuneo.*

Il cuneo è uno strumento usato per suddividere un oggetto in due o più parti. Tutti gli attrezzi che servono per tagliare (lame di coltelli, asce, chiodi, ecc.) sfruttano tale principio. Il cuneo è un prisma avente per sezione un triangolo isoscele molto allungato e quindi con un angolo al vertice φ molto piccolo; esso può essere considerato come un doppio piano inclinato di angolo $\theta = \varphi/2$, come mostrato in Figura 3.2.

Per capire il principio fisico su cui si basa questo strumento, analizziamo le forze che entrano in gioco. Quando vogliamo dividere un corpo in due parti con un cuneo, esercitiamo una forza sulla base del cuneo, ottenendo come risultato la suddivisione del corpo in due parti. La forza $\vec{F}$ diretta verso il basso è equivalente a due forze, $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$, di uguale intensità e agenti perpendicolarmente alle superfici laterali del cuneo, come illustrato in Figura 3.2. Scomponendo $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$ nella direzione verticale e orizzontale, si ottiene

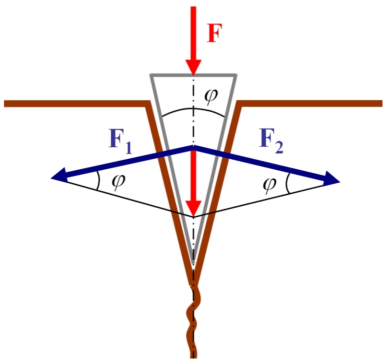

Figura 3.2: Il cuneo.

$$\begin{cases} F_{1x} = F_{2x} = F_1 \cos(\varphi/2) \\ F_{1y} = F_{2y} = F_1 \sin(\varphi/2)\,. \end{cases} \tag{3.10}$$

Si deve avere anche

$$F_{1y} + F_{2y} = 2F_1 \sin(\varphi/2) = F\,, \tag{3.11}$$

da cui si ricava

$$F_1 = F_2 = \frac{F}{2\sin(\varphi/2)} = \frac{F}{2\sin(\theta)} \qquad (\theta = \varphi/2)\,. \tag{3.12}$$

Dall'equazione appena ricavata si vede che per φ piccoli, F_1 ed F_2 sono molto più grandi di F. Possiamo scrivere $\sin(\theta)$ in termini delle dimensioni del cuneo, in quanto $\sin(\theta) = (b/2)/l$, dove b è la base del cuneo ed l la lunghezza dei lati. Sostituendo $\sin(\theta)$ nell'Eq. (3.12) si ottiene

$$F_1 = F_2 = \frac{l}{b}F \qquad \left(\frac{l}{b} > 1\right) ; \tag{3.13}$$

il fattore l/b si chiama fattore di amplificazione meccanica e indica di quanto le forze F_1 ed F_2 sono più grandi di F.

L'Eq. (3.13) può essere ricavata anche da considerazioni geometriche considerando la similitudine dei triangoli formati dal cuneo e dalle forze (v. Figura 3.2). In questo caso, vale la seguente relazione

$$F : b = F_1 : l ; \tag{3.14}$$

da cui si ricava l'Eq. (3.13).