

Esperienza 1

Determinazione sperimentale del valore di π

Obiettivi - Comprendere l'importanza degli errori sperimentali nelle misurazioni; a questo scopo, si determinerà sperimentalmente il valore di π .

Concetti - Errori sperimentali e propagazione degli errori nelle misure indirette.

Materiali e Strumenti - Cilindri di differenti dimensioni; calibro ventesimale, con errore di sensibilità pari a 0.05 mm; metro a nastro di carta, con errore di sensibilità pari a 1 mm.

1.1 Cenni teorici

Dato un cerchio di diametro D , si definisce π il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il valore del diametro

$$\pi = \frac{C}{D}. \quad (1.1)$$

Il valore teorico di π è 3.1415926535 ...

1.2 Attività, misure e calcoli

Per determinare sperimentalmente il valore di π , basta misurare il diametro e la circonferenza di un disco e calcolare quindi π con l'Eq. (1.1).

La misurazione del diametro del disco può essere realizzata direttamente con il calibro ventesimale. La misurazione della circonferenza è più difficile; essa si può

eseguire avvolgendo un metro di carta attorno al cilindro e misurando la lunghezza della circonferenza, come mostrato in Figura 1.1 (si invitano gli studenti a trovare dei metodi per ridurre l'errore sperimentale in questa misurazione). Si misura quindi il diametro e la circonferenza di vari cilindri. Effettuando tali misurazioni in una serie di cilindri di differente diametro, sono stati ottenuti i risultati riportati in Tabella 1.1.

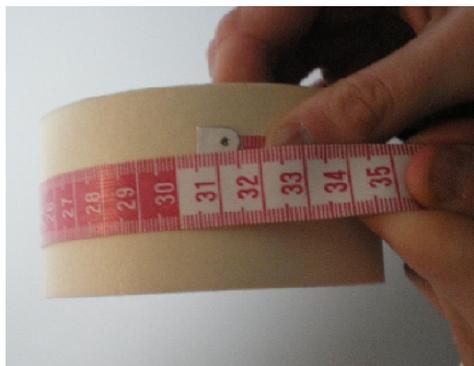


Figura 1.1: Metodo di misura della circonferenza di un cilindro.

Tabella 1.1: Valori misurati dei diametri dei cilindri e delle rispettive circonferenze; in tabella sono riportati anche gli errori strumentali dovuti alla sensibilità degli strumenti di misura usati.

| D (mm) | δD (mm) | C (mm) | δC (mm) |
|----------|-----------------|----------|-----------------|
| 9.65 | 0.05 | 31 | 1 |
| 11.15 | 0.05 | 34 | 1 |
| 12.85 | 0.05 | 40 | 1 |
| 16.25 | 0.05 | 51 | 1 |
| 21.30 | 0.05 | 67 | 1 |

1.3 Analisi dei dati

Per determinare il migliore valore di π e la sua indeterminazione si riportano in grafico i valori di C e di D misurati. Dai dati di Tabella 1.1, si ottiene il grafico di Figura 1.2, da cui si vede che i dati seguono un andamento lineare, cioè sono disposti lungo una linea retta. Quindi, possiamo cercare una retta che passa per più punti, compreso l'origine degli assi.

Il valore di π si trova calcolando la pendenza della cosiddetta *retta di best fit*, cioè la retta che meglio si adatta ai dati sperimentali (v. Cap. 1). Tuttavia, è preferibile

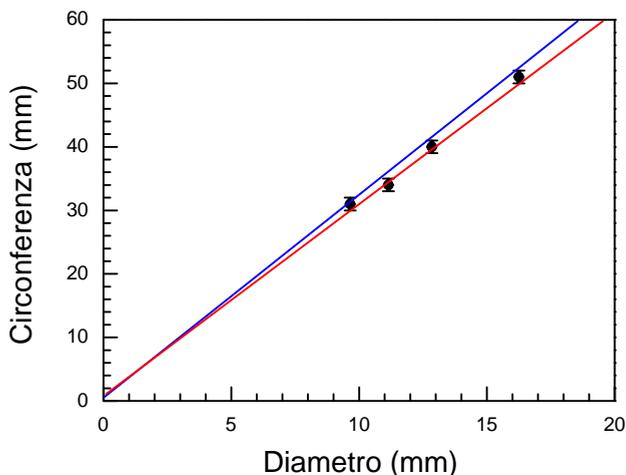


Figura 1.2: Grafico del valore della circonferenza in funzione del diametro; nel grafico sono riportate anche le rette di massima (linea blu) e di minima (linea rossa) pendenza.

trovare i valori delle pendenze della retta di massima e minima pendenza, da cui ricavare il valore *best* di π e l'errore a esso associato con il seguente procedimento:

$$\pi_{best} = \frac{\pi_{max} + \pi_{min}}{2}, \quad (1.2)$$

$$\delta\pi = \frac{\pi_{max} - \pi_{min}}{2}. \quad (1.3)$$

Per fare ciò, si tracciano a mano le rette di massima e di minima pendenza e si calcolano le loro pendenze. In Figura 1.2, sono mostrate in blu la retta di massima pendenza e in rosso quella di minima pendenza. Si scelgono quindi due punti appartenenti alla retta considerata, di coordinate rispettivamente $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$, e si calcola il rapporto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}. \quad (1.4)$$

I valori che si ottengono dall'analisi grafica sono

$$\pi_{max} = 3.222,$$

$$\pi_{min} = 3.067;$$

da cui possiamo calcolare

$$\pi_{best} = \frac{\pi_{max} + \pi_{min}}{2} = 3.1445,$$

$$\delta\pi = \frac{\pi_{max} - \pi_{min}}{2} = 0.077.$$

Il risultato così ottenuto va approssimato correttamente. La regola è la seguente. Si approssima l'errore a una, o due cifre significative, dopodiché si approssima il valore di π al corrispondente posto decimale. Seguendo questa regola, otteniamo

$$\pi = \pi_{best} \pm \delta\pi = 3.14 \pm 0.08.$$

L'errore relativo del valore di π stimato è

$$\varepsilon\pi = \frac{\delta\pi}{\pi_{best}} = \frac{0.08}{3.14} \approx 0.03.$$

Il metodo della retta di minima e massima pendenza, usato per la determinazione del valore di π , permette di stimare agevolmente l'indeterminazione (o errore) nel valore di π ottenuto con il metodo sperimentale.

E. Fiordilino, A. Agliolo Gallitto, *Il Laboratorio di Fisica nel Progetto 'Lauree Scientifiche'*, Aracne, Roma 2010.

Curiosità. *Il valore di π nella piramide di Cheope.*

La piramide di Cheope, mostrata in Figura 1.3, risalente al periodo dal 2500 a.C. al 2100 a.C. circa, è una delle costruzioni più grandi mai realizzate dall'uomo. La base della piramide misura 230 m di lato, è alta 137 m e pesa circa 6.000.000 tonnellate (6×10^9 kg). Sebbene l'altezza attuale della piramide è di 137 m, l'altezza geometrica ottenuta dal prolungamento degli spigoli è di 146 m [*].

All'inizio del 1800, è stato scoperto che dividendo il perimetro della piramide per il doppio dell'altezza geometrica si ottiene un valore molto vicino al valore di π

$$\pi = \frac{4 \times 230}{2 \times 146} = 3.15. \quad (1.5)$$

La scoperta del numero π viene attribuita ad Archimede (287 - 212 a.C.) ma il valore di π fu determinato con una precisione alla quarta cifra decimale solo nel VI secolo d.C.

[*] F. Vaghi, *I misteri delle piramidi*, Demetra, Colognola ai Colli (VR) 2000.



Figura 1.3: La piramide di Cheope.

Fonte immagine: Berthold Werner, Wikimedia Commons.