Facoltà di Architettura di Palermo
Corso di Laurea Specialistica in Architettura

COMPLEMENTI ED ESERCIZI DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE II

Docente: Prof. Valeria Marraffa

anno accademico 2013/2014

Il "perché" dello studio della Matematica in un corso di laurea in Architettura:

"La filosofia è scritta in questo grandissimo libro ...dell'universo, ma non si può intendere se prima non s'impara ad intendere la lingua, e conoscere i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola,..."(*Galileo Galilei, Saggiatore 1623*).

"Architettura è scienza di molte discipline, di diversi ammaestramenti ornata, dal cui giudizio s'approvano tutte le opere, che dalle altre arti compiutamente si fanno ... quelli, a i quali la natura benigna tanta di solertia, vivezza d'ingegno, di memoria haverà conceduto, che possino insieme, la Geometria, l'Astrologia, la Musica, le altre discipline perfettamente conoscere, certamente passano i termini, gli officii dello Architetto, si fanno Mathematici, dove facilmente possono disputare contro quelle discipline, perché di piu arme di scienze armati sono"(*M. Vitruvio, De architectura*).

"Architetto chiamerò colui che con metodo sicuro e perfetto sappia progettare razionalmente e realizzare praticamente, attraverso lo spostamento dei pesi e mediante la riunione e la congiunzione dei corpi, opere che nel modo migliore si adattino ai più importanti bisogni dell'uomo. a tal fine gli è necessaria la padronanza delle più alte discipline... All'architetto sono indispensabili la pittura e la matematica tanto quanto è al poeta la conoscenza della voce e delle sillabe"(*L.B.Alberti, De re aedificatoria*).

"I muri sialzano verso il cielo secondo un ordine che mi commuove. ... Siete dolci, brutali, incantevoli o dignitosi. Me lo dicono le vostre pietre. Mi incollate a questo posto e i miei occhi guardano. I miei occhi guardano qualcosa che esprime un pensiero. Un pensiero che si rende manifesto senza parole e senza suoni, ma unicamente attraverso prismi in rapporto tra loro. ... Questi rapporti non hanno niente di necessariamente pratico o descrittivo. Sono la creazione matematica dello spirito. Sono il linguaggio dell'architettura" (*Le Corbusier, Vers une architecture*).

"La lezione di Einstein ... da un lato, relaziona l'edificio, lo spazio-tempo e l'esistenza umana al contesto ecologico, alla globalità dei fenomeni; ma, dall'altro, ne propugna la libertà, l'esuberante dispiegamento, il coraggio inventivo. L'uomo non è più il centro dell'universo, le sue leggi non sono più assiomatiche ed assolute; tuttavia, nel momento stesso in cui queste leggi si revitalizzano, l'individuo riacquista la sua indipendenza ..."(*B. Zevi, Pretesti di critica architettonica*).

E adesso cominciamo il nostro cammino!

In queste note verranno proposti alcuni testi di esercizi, dello stesso livello di difficoltà di quelli che l'allievo dovrà risolvere sia nelle prove in itinere, sia nella prova scritta dell'esame finale. Per ogni esercizio è data la soluzione. Gli esercizi sono suddivisi per argomento ed integrati con complementi di teoria. Di seguito è riportata la bibliografia consigliata.

Bibliografia

[1] R. A. Adams, *Calcolo differenziale 1* , Casa Editrice Ambrosiana.
[2] M. Bramanti-C. D. Pagani - S. Salsa, *Matematica, Calcolo infinitesimale ed algebra lineare*, Zanichelli.
[3] P. Marcellini - C. Sbordone, *Calcolo*, Liguori editore.
[4] P. Marcellini - C. Sbordone, *Esercitazioni di Matematiche II*, 2 volume, parte prima e parte seconda, Liguori editore.

I. Le coniche

I.1 Introduzione Le coniche, dopo le rette sono le curve algebriche piane più semplici, alla cui famiglia appartengono anche le circonferenze.
Il nome "coniche" per tali curve discende dal fatto, ben noto già dall'antichità, che esse si possono ottenere intersecando un cono circolare retto completo con un piano.
Sono particolari coniche le ellissi, ed in particolare le circonferenze, le iperboli e le parabole le cui equazioni canoniche (cioè riferite ad opportuni assi di riferimento) sono:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *ellisse*

$\frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2} = 1$ *iperbole*

$y = \frac{x^2}{4k}$ *parabola*

$x = \frac{y^2}{4k}$ *parabola.*

Ciascuna delle precedenti equazioni è un' equazione algebrica di secondo grado in x ed y.
Esistono altre curve piane, oltre a quelle ora citate, che sono rappresentate da un'equazione algebrica di secondo grado in x ed y? La risposta positiva è contenuta negli esempi seguenti.

Esempio 1 *Si consideri l'equazione*

$$9y^2 - x^2 = 0 \ . \tag{1}$$

Poiché la (1) può scriversi : $(3y - x)(3y + x) = 0$, *essa è soddisfatta dalle coordinate di tutti i punti appartenenti alla retta* $(3y - x) = 0$ *oppure alla retta* $(3y + x) = 0$. *Pertanto la (1) rappresenta* **due rette piane incidenti**.

Esempio 2 *Si consideri l'equazione*

$$y^2 - 4 = 0 \ . \tag{2}$$

Poiché la (2) può scriversi : $(y - 2)(y + 2) = 0$, *essa rappresenta le* **due rette parallele** $y = 2$ *e* $y = -2$.

Esempio 3 *L'equazione*

$$(x - y)^2 = 0$$

rappresenta la bisettrice del primo e terzo quadrante contata due volte, o anche **due rette coincidenti**.

Esempio 4 *L'equazione*

$$y^2 + 5 = 0$$

non è soddisfatta dalle coordinate di alcun punto, quindi essa rappresenta **l'insieme vuoto**.

Esempio 5 *L'equazione*

$$2x^2 + y^2 = 0$$

è soddisfatta solo dalle coordinate dell'origine, quindi essa rappresenta **un sol punto**.

Nel paragrafo seguente daremo la definizione rigorosa di conica e vedremo che gli esempi ora considerati esauriscono tutti i casi di "coniche".

I.2 Coniche e loro classificazione analitica

Definizione 1 *Si chiama* **conica** *una curva piana rappresentabile mediante un'equazione algebrica di secondo grado nelle variabili x ed y, cioè mediante un'equazione del tipo:*

$$f(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{3}$$

Si può provare che le curve piane la cui equazione è del tipo (3) sono soltanto le seguenti:

1. un'ellisse;
2. una circonferenza (caso particolare dell'ellisse);
3. una parabola;
4. un'iperbole;
5. due rette incidenti;
6. due rette parallele;
7. due rette coincidenti;
8. un punto;
9. l'insieme vuoto.

Per riconoscere di che tipo è una conica $\mathcal{C}$ di equazione (3), è utile considerare la matrice simmetrica del terzo ordine

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right\|, \tag{4}$$

chiamata **matrice associata a $\mathcal{C}$**.

Il teorema seguente, che non dimostreremo, fornisce un rapido metodo per la classificazione delle coniche.

Teorema 1 *Sia data la conica $\mathcal{C}$ di equazione (3), sia A la sua matrice associata e sia A_{33} il complemento algebrico dell'elemento a_{33} della matrice A.*
Si hanno due casi:

1^o *caso: $det(A) \neq 0$.*
Allora $\mathcal{C}$ è

un' iperbole	*se*	$A_{33} < 0$
una parabola	*se*	$A_{33} = 0$
un'ellisse	*se*	$A_{33} > 0$ **e** $a_{11}det(A) < 0$
l'insieme vuoto	*se*	$A_{33} > 0$ **e** $a_{11}det(A) > 0$.

2^o *caso:* $det(A) = 0$.
Allora $\mathcal{C}$ *è costituita o da* **due rette incidenti** *o da* **due rette parallele***, o da* **due rette coincidenti***, o da* **un sol punto** *oppure dall'***insieme vuoto***.*

Se $det(A) = 0$ si dice che $\mathcal{C}$ è **degenere**, se invece $det(A) \neq 0$ si dice che $\mathcal{C}$ è **non degenere**.

Nota 1 *Si osservi che nel caso della parabola, essere* $A_{33} = 0$ *equivale a dire che nella (3) il complesso dei termini di secondo grado è un quadrato "perfetto".*

Esempio 6 *Classificare le coniche seguenti:*
a) $2x^2 + y^2 + xy - 3y - 1 = 0$ *Si ha*

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{array} \right\|, \qquad A_{33} = \left| \begin{array}{cc} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right|.$$

Risulta $det(A) = -\frac{25}{4}$*, quindi la conica è non degenere. Inoltre* $A_{33} = \frac{7}{4} > 0$ *e* $a_{11}det(A) = -\frac{25}{2} < 0$*. Pertanto la conica è un'ellisse.*

b) $x^2 + 4y^2 - 4xy - 3x + 1 = 0$
Si ha

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array} \right\|, \qquad A_{33} = \left| \begin{array}{cc} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{array} \right|.$$

Risulta $det(A) = -9$*, quindi la conica è non degenere. Inoltre* $A_{33} = 0$*. Pertanto la conica è una parabola.*

c) $x^2 - 2y^2 - 8xy + 3y - 1 = 0$ *Si ha*

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \end{array} \right\|, \qquad A_{33} = \left| \begin{array}{cc} 1 & -4 \\ -4 & -2 \end{array} \right|.$$

Risulta $det(A) = \frac{63}{4}$*, quindi la conica è non degenere. Inoltre* $A_{33} = -18 < 0$*. Pertanto la conica è un'iperbole.*

d) $\quad 3x^2 - y^2 + 2xy + x + y = 0$ *Si ha*

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right\| .$$

Risulta $det(A) = 0$, *quindi la conica è degenere.*

Esercizi proposti

1. Tracciare l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$.
2. Tracciare l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{4} = 1$.
3. Tracciare l'iperbole di equazione $\frac{y^2}{10} - \frac{x^2}{6} = 1$.
4. Trovare fuoco e direttrice della parabola di equazione $y^2 = 16x$.

   Soluzione: $F = (4, 0)$, $x = -4$ retta direttrice.
5. Classificare le coniche seguenti:

$$\begin{array}{lll} i) & 3x^2 - y^2 + x - 4y - 1 = 0 & (iperbole) \\ ii) & x^2 + y^2 - xy - 2x - y - 2 = 0 & (ellisse) \\ iii) & x^2 + y^2 + 2xy + x - 1 = 0 & (parabola) \\ iv) & 4x^2 + 4y^2 + xy - 1 = 0 & (ellisse) \ . \end{array}$$

II. Sfera - Cono - Cilindro - Quadriche

II.1 Superfici e curve

Fissato nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali, consideriamo un'equazione in tre incognite x, y, z che indichiamo con

$$f(x, y, z) = 0, \tag{5}$$

e supponiamo che la (5) abbia soluzioni.
Nei casi più comuni, il luogo dei punti, le cui coordinate soddisfano la (5), è una *superficie*, nel senso intuitivo della parola.
Se il primo membro della (5) è un polinomio di grado n, la superficie si dice *algebrica di ordine* n. Una superficie non algebrica, si dice *trascendente*. *Le superfici algebriche di primo grado sono i piani.*
Siano, poi, F e G due superfici rappresentate dalle equazioni:

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0. \tag{6}$$

La totalità dei punti che con le loro coordinate soddisfano contemporaneamente le (6), costituisce una *curva* $\mathcal{C}$ (in generale *gobba* o *sghemba*, cioè non piana), *luogo dei punti comuni alla* F *e alla* G, o come si suole anche dire, l'*intersezione* di queste due superfici. Le (6) si dicono *le equazioni cartesiane della curva.* Naturalmente la curva $\mathcal{C}$ si può rappresentare con un qualunque altro sistema, equivalente al sistema (6).
Se F e G sono due piani, le (6), come abbiamo già visto, sono le equazioni della retta intersezione di F con G.

II.2 Sfera

Come è noto, si chiama *superficie sferica o sfera il luogo dei punti dello spazio equidistanti da un punto fisso detto centro.* Con considerazioni analoghe a quelle svolte nel caso di una circonferenza nel piano, si ha che:
l'equazione di una sfera di centro $C = (x_0, y_0, z_0)$ *e raggio* r *è*:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2,$$

o anche, posto $a = -2x_0$, $b = -2y_0$, $c = -2z_0$, $d = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2$:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0. \tag{7}$$

Viceversa: *ogni equazione algebrica di* 2^o *grado del tipo (7) (cioè mancante dei termini* xy, xz *e* yz *ed avente uguali i coefficienti di* x^2, y^2 *e* z^2*) rappresenta una sfera se risulta*:

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d > 0. \tag{8}$$

In tal caso le coordinate del centro sono:

$$C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right),$$

e il raggio è dato da

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d}. \tag{9}$$

II.3 Cilindro

Nello spazio si chiama *cilindro la superficie luogo delle* ∞^1 *rette* g*, parallele ad una retta data* d*, condotta per i punti di una curva* $\mathcal{C}$.

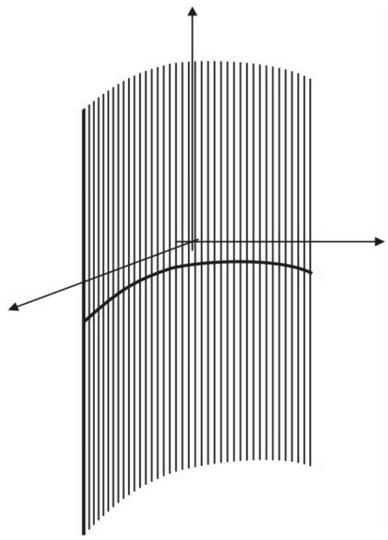


Figure 1: Cilindro.

Le rette g si chiamano le *generatrici* del cilindro. Poichè un piano, non parallelo a d, interseca le generatrici in punti di una curva, la curva $\mathcal{C}$ a partire dalla quale si definisce il cilindro, si può sempre supporre piana. Ciò posto consideriamo un' equazione nelle due variabili x e y :

$$f(x, y) = 0. \tag{10}$$

Nel piano xy essa rappresenta una curva $\mathcal{C}$; esaminiamone il significato nello spazio xyz. Se $P_0 = (x_0, y_0, 0)$ è un punto di $\mathcal{C}$, x_0 e y_0 verificano la (10); ogni punto $P = (x_0, y_0, z)$, della retta parallela all'asse delle z, condotta per P_0 ha la stessa ascissa

x_0 e la stessa ordinata y_0 di P_0, e pertanto anche le coordinate di P soddisfano la (10). Altrettanto dicasi per ogni altro punto di $\mathcal{C}$. D'altra parte le parallele per i punti di $\mathcal{C}$ all'asse delle z, formano un cilindro. Poichè le coordinate di tutti e soli i punti di tale cilindro soddisfano la (10), *essa è l'equazione del cilindro formato dalle rette parallele all'asse delle z, condotte per i punti di $\mathcal{C}$*. Cosiderazioni analoghe valgono per un'equazione in cui manchi la x o la y (in tal caso il cilindro ha le generatrici parallele rispettivamente all'asse delle x o all'asse delle y).

II.4 Cono

Nello spazio, *il luogo delle ∞^1 rette g congiungenti i punti di una curva $\mathcal{C}$ con un fissato punto V, si chiama cono di vertice V.* Le rette g si chiamano *generatrici* del cono.

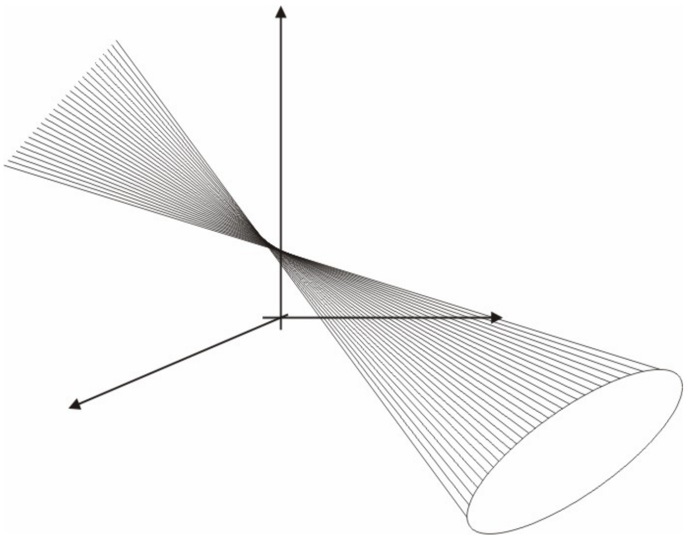


Figure 2: Cono.

Poichè un piano, non passante per V, interseca le generatrici in punti di una curva, la curva $\mathcal{C}$, a partire dalla quale si definisce il cono, si può supporre piana. Ciò posto consideriamo un'equazione in tre variabili:

$$f(x, y, z) = 0, \tag{11}$$

dove la funzione $f(x, y, z)$ è omogenea di grado n in x, y, z. Ciò significa che si ha

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z) \qquad \forall t \in I\!R.$$

Per esempio è omogenea la funzione $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ (si ponga $n = 3$); è omogenea la funzione $f(x,y,z) = y^2 \sin \frac{z}{x}$ (qui è $n = 2$). *La (11) rappresenta un cono con il vertice nell'origine.*

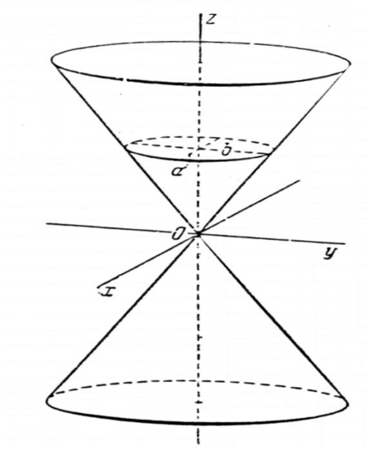


Figure 3: Cono con vertice nell'origine.

Infatti sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto, diverso dall'origine, le cui coordinate verificano la (11); è allora

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

La retta che congiunge P_0 all'origine ha equazioni:

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0};$$

pertanto se $P' = (x', y', z')$ è un suo punto, risulta: $\frac{x'}{x_0} = \frac{y'}{y_0} = \frac{z'}{z_0}$, ossia ponendo $\frac{x'}{x_0} = t$:

$$x' = tx_0, \quad y' = ty_0, \quad z' = tz_0.$$

Segue:

$$f(x', y', z') = f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^n f(x_0, y_0, z_0) = 0;$$

cioè anche le coordinate di P' soddisfano la (11). Dunque se la (11) è soddisfatta dalle coordinate di un punto P_0, è soddisfatta anche dalle coordinate di tutti i punti che appartengono alla retta congiungente P_0 all'origine. Il luogo dei punti soddisfacenti alla (11) si compone perciò di rette uscenti dall'origine, ossia è un cono di vertice V.

II.5. Le quadriche

Chiamasi *quadrica il luogo dei punti dello spazio le cui coordinate cartesiane* x, y, z *soddisfano un'equazione algebrica di secondo grado*:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy \\ &+ 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Abbiamo già incontrato un esempio di quadrica, la *sfera*. Sono poi quadriche particolari (*quadriche degeneri*) i *coni ed i cilindri algebrici del secondo ordine*[1] e le *coppie di piani* (distinti o coincidenti).
Si chiama *discriminante* della quadrica (12) il determinante simmetrico del quarto ordine:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad (a_{ik} = a_{ki}). \tag{13}$$

Si può dimostrare che l'annullarsi di A esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè la quadrica (12) sia degenere. In particolare:
se la caratteristica è $r = 3$, l'equazione (12) rappresenta un cono o un cilindro (del secondo ordine);
per $r = 2$ si ha una coppia di piani distinti (reali o no);
per $r = 1$ la quadrica risulta formata da un piano contato due volte.
Ogni retta, che non appartiene ad una quadrica, la incontra in due punti, che possono essere reali e distinti (retta secante), reali e coincidenti (retta tangente) o non reali (retta esterna).
Ogni piano interseca una quadrica secondo una conica che può risultare non degenere e reale (piano secante), non degenere e non reale (piano esterno), o infine degenere. In questo caso il piano è tangente alla quadrica, nel punto comune alle due rette che costituiscono la conica sezione (punto di contatto), e su di esso stanno tutte le rette tangenti in quel punto.

[1] Si chiama cono (cilindro) algebrico del secondo ordine, un cono (cilindro) la cui equazione si ottiene eguagliando a zero un polinomio di secondo grado in x, y, z.

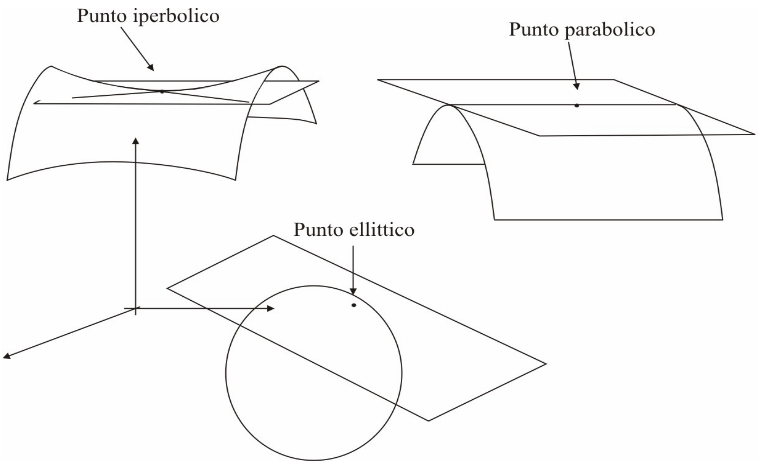


Figure 4: Classificazione dei punti di una quadrica.

In ogni punto P di una quadrica esiste *un sol piano tangente*, ad eccezione del caso in cui la quadrica si decompone in due piani oppure è un cono di vertice P. Ciò permette, esclusi i due ultimi casi, di classificare i punti di una quadrica nel modo seguente. Si dice che un punto P di una quadrica è *iperbolico, parabolico o elittico*, secondo che le due rette comuni alla quadrica ed al piano tangente in P, risultano *reali e distinte*, *coincidenti* o *non reali* (cfr. fig.4).
Si può provare che:

- (i) tutti i punti di una quadrica sono dello stesso tipo;
- (ii) le quadriche a punti parabolici sono tutte e sole quelle degeneri (coni, cilindri) (cfr. fig.4);
- (iii) le quadriche a punti iperbolici sono le quadriche non degeneri rigate (cioè le quadriche non degeneri costituite da una famiglia di rette).

Per sapere di che tipo è una quadrica, si studia il segno del suo discriminante: *una quadrica risulta a punti iperbolici, parabolici o ellittici, secondo che il suo discriminante A è > 0, $= 0$, oppure < 0.* Le quadriche a punti ellittici si dividono in *ellissoidi*, *iperboloidi a due falde* e *paraboloidi ellittici* (cfr. fig.5).
Quelle a punti iperbolici (quadriche rigate) prendono i nomi di *iperboloide ad una falda* e *paraboloide iperbolico* o *a sella* (cfr. fig.5).

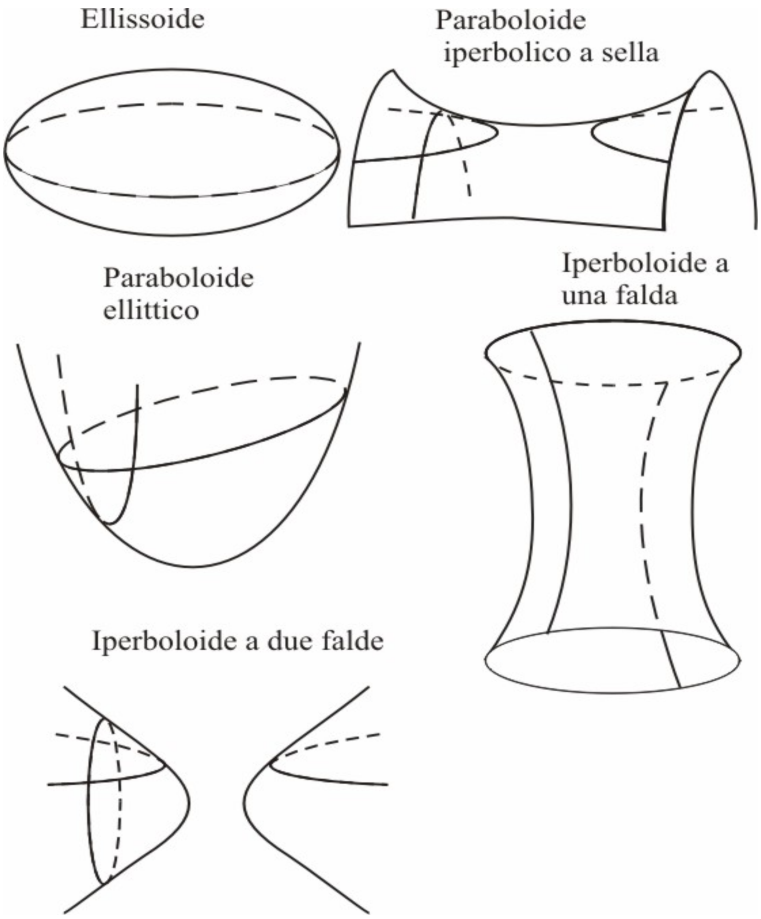


Figure 5: Quadriche non degeneri.

Esse contengono due *sistemi o schiere* di rette reali (generatrici). Si ha che (cfr. figg. 8 e 11):

(*i*) da ogni punto della quadrica esce una retta di ciascuna schiera;

(*ii*) due rette di una stessa schiera sono sghembe tra loro;

(*iii*) due rette di schiere diverse sono sempre incidenti.

Nella costruzione di torri idrauliche e di alte antenne radio si fa vasto impiego di strutture costituite da travi di metallo disposte come le generatrici rettilinee di un iperboloide ad una falda (cfr. fig.8). L'idea di servirsi nella tecnica delle costruzioni di siffatte strutture appartiene al celebre ingegnere russo Vladimir Suchov.

II.6. Equazioni canoniche delle quadriche non degeneri.

Scriviamo ora le equazioni delle quadriche non degeneri, rispetto a particolari sistemi di riferimento a cui ci si può sempre ricondurre. Tali equazioni prendono il nome di *equazioni canoniche*.

a) La quadrica di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a, b, c > 0) \tag{14}$$

è un *ellissoide* (cfr. fig.6).

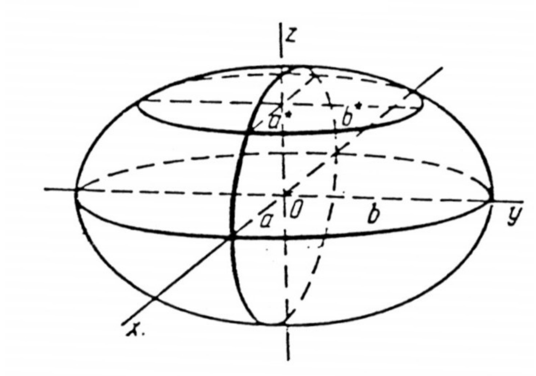


Figure 6: Ellissoide.

Osserviamo subito che se $a = b = c$, la (14) diventa $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e rappresenta una sfera di centro l'origine e raggio a. Inoltre poichè la (14) contiene solo i quadrati delle coordinate, se ne deduce che se una terna di valori (x, y, z) soddisfa l'equazione, la soddisfano anche le terne $(-x, -y, -z)$, $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$, etc.; pertanto la quadrica è simmetrica rispetto all'origine, rispetto ai piani coordinati e rispetto agli assi coordinati. L'origine e gli assi coordinati si chiamano rispettivamente *centro* e *assi* dell'ellissoide. I punti in cui tali assi incontrano la superficie si dicono *vertici*. Per studiare la forma di questa quadrica, esaminiamo le curve, intersezioni dell'ellissoide con i piani paralleli ai piani coordinati. Se intersechiamo con il piano xy, che ha equazione $z = 0$, e poniamo nella (14) $z = 0$, otteniamo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

che interpretata nel piano xy rappresenta un'ellisse di semiassi a e b. Se, invece, intersechiamo con un piano parallelo al piano xy, di equazione $z = h$, si ottiene la curva sezione, definita dal sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \\ \\ z = h \end{cases} \tag{15}$$

e, per $|h| < c$, rappresenta nel piano $z = h$ l'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2(\frac{c^2-h^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(\frac{c^2-h^2}{c^2})} = 1$$

di semiassi $a\sqrt{\frac{c^2-h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{\frac{c^2-h^2}{c^2}}$. Ne segue che, man mano che h va crescendo in valore assoluto (sempre restando $|h| \leq c$), tali assi vanno sempre più impicciolendo, sino a che per $h = \pm c$ si annullano. Per $h = \pm c$, la (15) è soddisfatta solo da $x = 0$ e $y = 0$. Pertanto i due piani $z = c$ e $z = -c$ incontrano ciascuno l'ellissoide in un sol punto: nel punto $C = (0, 0, c)$ il primo, nel punto $C' = (0, 0, -c)$ il secondo. Per $h > c$ l'equazione (15) non ha soluzioni reali; l'ellissoide è dunque tutto compreso fra i due piani $z = c$ e $z = -c$. Conclusioni analoghe si hanno sezionando l'ellissoide con piani paralleli agli altri due piani coordinati. Posto $A = (0, 0, a)$, $A' = (0, 0, a')$, $B = (0, b, 0)$ e $B' = (0, b', 0)$, i punti A, A', B, B', C e C' sono i vertici dell'ellissoide ed i segmenti AA', BB' e CC', (cfr. fig. 6) hanno lunghezza rispettivamente $2a$, $2b$ e $2c$. La forma della quadrica è quella della figura .

b) La quadrica di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a, b, c > 0) \tag{16}$$

è un *iperboloide ad una falda* (o *iperbolico* o *rigato*).

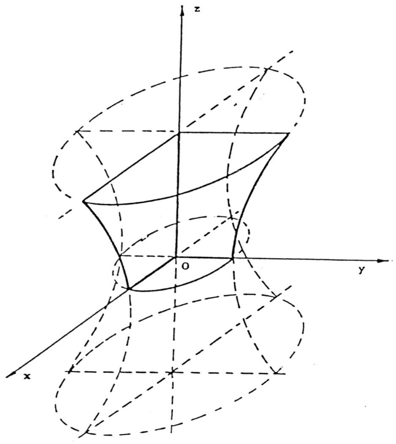


Figure 7: Iperboloide iperbolico.

Semplici considerazioni del tipo di quelle fatte per l'ellissoide, mostrano che la sua forma è quella indicata in figura 7.

Scritta la (16) nella forma:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right),$$

si vede subito che l'iperboloide si può pensare come il luogo delle rette, ottenute al variare del parametro λ:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \left(1 - \frac{y}{b}\right) = \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \end{cases} \tag{17}$$

oppure, come il luogo delle rette, ottenute al variare del parametro μ:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \mu\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \left(1 + \frac{y}{b}\right) = \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \end{cases} \tag{18}$$

Le rette (17) sono quelle di una delle due schiere di rette della quadrica, le rette (18) quelle dell'altra schiera (cfr. fig.8). Se è $a^2 = b^2$, cioè se l'iperboloide ha equazione

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

esso può pensarsi generato dalla rotazione completa, intorno all'asse delle z, dell'iperbole

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} & = & 1 \\ y & = & 0 \end{cases},$$

ottenuta intersecando la superficie con il piano xz.

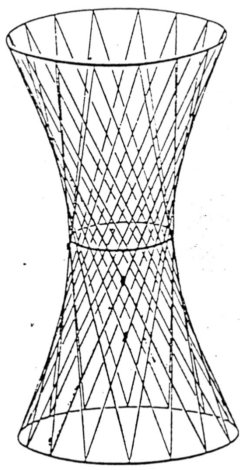


Figure 8: Iperboloide iperbolico.

c) La quadrica di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a, b, c > 0) \tag{19}$$

è un *iperboloide ellittico a due falde.*

Si riconosce facilmente che la sua forma è quella della fig.9.

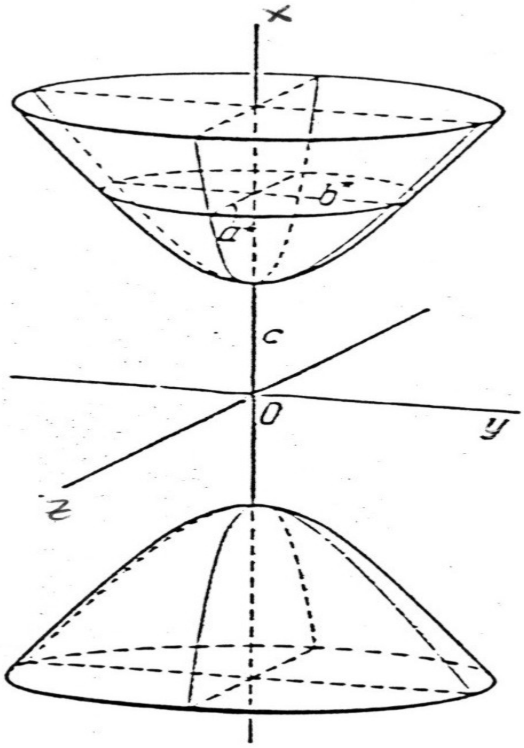


Figure 9: Iperboloide ellittico.

Se è $b^2 = c^2$, l'iperboloide ellittico ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1,$$

ed esso si può pensare generato dalla rotazione completa, intorno all'asse dlle x, dell'iperbole

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} & = & 1 \\ z & = & 0 \end{cases},$$

ottenuta intersecando la superficie con il piano xy.

d) La quadrica di equazione

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (p, q > 0) \tag{20}$$

è un *paraboloide ellittico*.

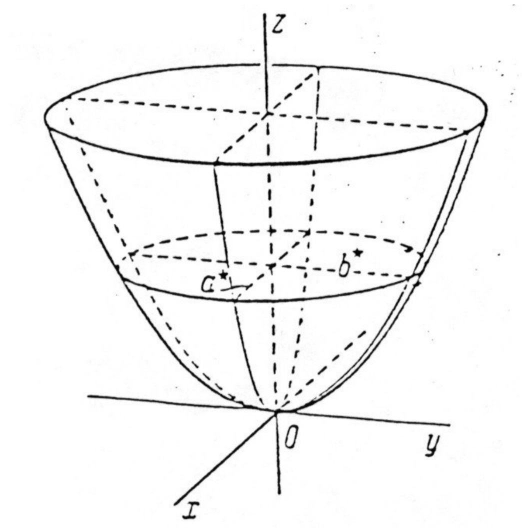


Figure 10: Paraboloide ellittico.

Con semplici considerazioni si può vedere che ha la forma indicata nella figura 10. Se è $p = q$, la (20) dinenta

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

e il paraboloide può pensarsi generato dalla rotazione completa, intorno all'asse delle z, della parabola:

$$\begin{cases} y^2 &= 2pz \\ x &= 0 \end{cases},$$

intersezione della superficie con il piano yz.

e) La quadrica di equazione

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (p, q > 0) \tag{21}$$

è un *paraboloide iperbolico* (o *rigato* o *a sella*).

E' facile riconoscere che la sua forma è quella della figura 11.

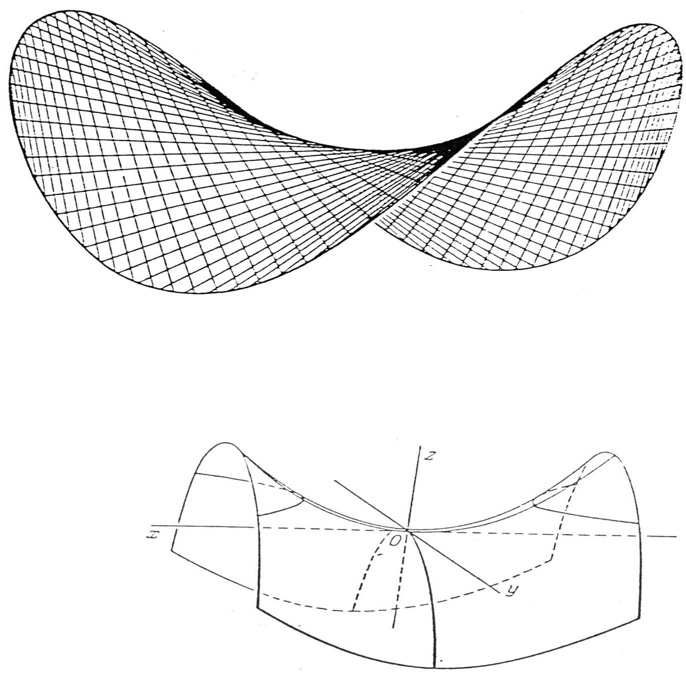


Figure 11: Paraboloide iperbolico.

Poichè la (21) si può scrivere:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z,$$

si vede subito che la quadrica è rigata e che si può pensare come il luogo delle rette:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) & = & \frac{1}{\lambda} \\ & & \\ \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) & = & 2\lambda z \end{array} \right. , \tag{22}$$

oppure, come il luogo delle rette, ottenute al variare del parametro μ:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) & = & \frac{2}{\mu} z \\ & & \\ \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) & = \mu & \end{array} \right. , \tag{23}$$

dove λ e μ sono parametri reali. Al variare di tali parametri, le (22) e le (23) danno le equazioni delle rette appartenenti alle due schiere di rette della quadrica (cfr. fig.11).

Esercizi proposti

1. Classificare e sommariamente rappresentare le seguenti superfici di $\mathbf{R}^3$:

   i) $x^2 + y^2 - 2z = 0$;

   ii) $2x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$;

   iii) $3y^2 - z^2 - x = 0$.

   Dire poi quali fra queste superfici sono di rotazione ed intorno a quale asse, e quali rigate.

   Soluzioni: i) Paraboloide ellittico, ii) iperboloide ad una falda, iii) paraboloide iperbolico.

2. Dire quali tra le seguenti quadriche

   i) $x^2 - y^2 = z$;

   ii) $x^2 + y^2 = z$;

   iii) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$;

   iv) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

   sono rigate e scrivere le equazioni delle due schiere di rette che le costituiscono.

   Soluzioni: *i*) e *iii*).

3. Quali tra le seguenti quadriche

   a) $x^2 + y^2 = z$;

   b) $x^2 - z^2 = 2y$;

   c) $4x^2 - 4y^2 - z^2 = 1$;

   d) $6x^2 + y^2 + 6z^2 = 8$;

   sono di rotazione ed attorno a quale asse?

   Soluzioni: *a*) attorno all'asse z e *d*) attorno all'asse y.

III. Funzione reale di due variabili reali.

Il concetto di funzione reale di una variabile si estende facilmente al concetto di funzione reale di due variabili.

Definizione (di funzione reale di due variabili reali). Una *funzione reale di due variabili reali* è una legge che ad ogni coppia (x, y) di un sottoinsieme A di R^2 associa un ben determinato numero reale $f(x, y)$. In simboli:

$$(x, y) \to f(x, y).$$

Per denotare una funzione si scriverà indifferentemente o $f(x, y)$ oppure $z = f(x, y)$. Nello spazio l'insieme dei punti

$$(x, y, f(x, y))$$

con $(x, y) \in A$, rappresenta una superficie, detta *grafico* della funzione $f(x, y)$.
Ad esempio, la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ (o equivalentemente $z = x^2 + y^2$) ha come superficie grafico un paraboloide ellittico con vertice nell'origine delle coordinate; la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ (o equivalentemente $z = x^2 - y^2$) ha come superficie grafico un paraboloide a sella, con l'origine come punto di sella; mentre la funzione $f(x, y) = ax + by + c$ (o equivalentemente $z = ax + by + c$), dove a, b, c sono costanti reali ha come superficie grafico un piano.
Il grafico di una funzione dà una rappresentazione tridimensionale della funzione stessa. E' possibile rappresentare bidimensionalmente una funzione mediante le curve di livello. Le *curve di livello* sono quelle curve del piano in cui la funzione f assume un valore costante.
Ad esempio, le curve di livello della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ sono circonferenze aventi il centro nell'origine delle coordinate; mentre le curve di livello della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ sono iperboli con centro nell'origine delle coordinate.

III.1 Derivate parziali prime e seconde. Vettore gradiente.

I concetti di continuità e derivabilità si estendono alle funzioni di due variabili. Nel caso in cui esistano, si possono considerare per una funzione di due variabili $f(x, y)$ definita in un insieme aperto $A \subseteq R^2$

- la *derivata parziale prima rispetto alla variabile* x che denotiamo con uno dei simboli

$$f_x(x, y) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} \qquad D_x f$$

- la *derivata parziale prima rispetto alla variabile* y che denotiamo con uno dei simboli

$$f_y(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \qquad D_y f.$$

Regola pratica per calcolare le derivate parziali prime.
La derivata parziale prima $f_x(x,y)$ rispetto ad x si calcola considerando la funzione $f(x,y)$ come funzione della sola variabile x, mentre la variabile y deve essere considerata come una costante. Quindi si potranno applicare tutte le regole note per il calcolo delle derivate delle funzioni di una variabile considerando la funzione $f(x,y)$ come funzione della variabile x e considerando la variabile y costante.
La derivata parziale prima $f_y(x,y)$ rispetto ad y si calcola considerando la funzione $f(x,y)$ come funzione della sola variabile y, mentre la variabile x deve essere considerata come una costante. Quindi si potranno applicare tutte le regole viste per il calcolo delle derivate delle funzioni di una variabile considerando la funzione $f(x,y)$ come funzione della variabile y e considerando la variabile x costante.

Definizione (di gradiente). Data una funzione di due variabili $f(x,y)$ definita in un insieme $A \subseteq R^2$ si dice *gradiente* di $f(x,y)$ nel punto (x,y) il vettore che ha per componenti le derivate parziali prime di f calcolate nel punto (x,y). Il gradiente si indica con il simbolo $\nabla f(x,y)$, si ha quindi

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)).$$

Si può provare che il **gradiente soddisfa le seguenti proprietà geometriche**:
• In ogni punto (x_0,y_0), $f(x,y)$ **aumenta nel modo più rapido** nella direzione del vettore gradiente $\nabla f(x_0,y_0)$. La rapidità di aumento massima è $|\nabla f(x_0,y_0)|$.
• In ogni punto (x_0,y_0), $f(x,y)$ **diminuisce nel modo più rapido** nella direzione del vettore $-\nabla f(x_0,y_0)$. La rapidità di diminuizione massima è $|\nabla f(x_0,y_0)|$.
• La rapidità di variazione di $f(x,y)$ è nulla nella direzione tangente alla curva di livello di f passante per (x_0,y_0).

Supponiamo ora che una funzione di due variabili $f(x,y)$ ammetta derivate parziali $f_x(x,y)$ ed $f_y(x,y)$ in tutto un insieme aperto A. Se, a loro volta, le funzioni $f_x(x,y)$ ed $f_y(x,y)$ sono parzialmente derivabili nei punti di tale insieme abbiamo *le derivate parziali seconde* della funzione $f(x,y)$, che sono ovviamente quattro:

$$f_{xx}(x,y) \qquad f_{yx}(x,y) \qquad f_{xy}(x,y) \qquad f_{yy}(x,y)$$

e si chiamano, rispettivamente, la derivata parziale seconda della f calcolata rispetto ad x due volte, la derivata parziale seconda della f calcolata prima rispetto ad x e

poi rispetto ad y, la derivata parziale seconda della f calcolata prima rispetto ad y e poi rispetto ad x ed infine la derivata parziale seconda della f calcolata rispetto ad y due volte.
Le derivate f_{yx} ed f_{xy} prendono il nome *derivate seconde miste*. Per esse vale il seguente

Teorema di Schwarz. *Le derivate seconde miste coincidono nei punti in cui sono continue.*

ESERCIZI

1. Segnare in $\mathbf{R}^2$ il dominio di definizione delle seguenti funzioni di due variabili:

$$
\begin{array}{ll}
i) & f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4} - 13 \ ; \\
ii) & f(x,y) = \log(x-y) + 9 \ ; \\
iii) & f(x,y) = \frac{\sqrt{y^4+x^2}}{x+y} \ ; \\
iv) & f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x+y}}; \\
v) & f(x,y) = \arctan \frac{y^2}{xy+1} \\
vi) & f(x,y) = ax^2 + bx + c, \quad a,\ b\ ,c\ \in \mathbf{R} \ ; \\
vii) & f(x,y) = \arcsin \frac{y}{x} \ .
\end{array}
$$

2. Tracciare il grafico delle funzioni

$$
\begin{array}{ll}
i) & f(x,y) = 2x - y - 1 \ ; \\
ii) & f(x,y) = x^2 - 2y^2 \ ; \\
iii) & f(x,y) = x^2 + y^2 \ ; \\
iv) & f(x,y) = -x^2 - 4y^2 - 4
\end{array}
$$

3. Calcolare le curve di livello delle funzioni

$$i) \quad f(x,y) = 2x - 3y + 9 \ ;$$

$$ii) \quad f(x,y) = x^2 - 2y^2 \ ;$$

$$iii) \quad f(x,y) = 2x^2 + 6y^2$$

$$iv) \quad f(x,y) = 2x^2 + 2y^2$$

4. Calcolare le derivate parziali rispetto ad x ed a y delle seguenti funzioni:

$$i) \quad f(x,y) = x \log(x^2 + y) + \sin \tfrac{x}{y} \ ;$$

$$ii) \quad f(x,y) = x^2 y - 3xy^4 + x - 10 \ .$$

5. Calcolare la derivata di $f(x,y) = y^2 \cos(xy)$ lungo la direzione del vettore $\vec{u} = (-1,5)$, nel punto $(1,\pi)$.

   Soluzione: $\frac{-10}{\sqrt{26}}\pi$.

6. Calcolare $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ e $\bigtriangledown f(x,y)$ per le seguenti funzioni:

$$i) \quad f(x,y) = \arctan \tfrac{y}{x} \ ;$$

$$ii) \quad f(x,y) = \cos(\tfrac{x+y}{y^2}) \ ;$$

$$iii) \quad f(x,y) = y^2 - x^2 + 3xy \ ;$$

$$iv) \quad f(x,y) = \tfrac{x-y^2}{x+y} \ .$$

7. Calcolare le curve di livello, passanti per i punti $P_0 = (1,1)$, $P_1 = (2,0)$ e $P_2 = (0,3)$, delle seguenti funzioni:

$$i) \quad f(x,y) = 3x^2 + 2y^2; \quad ii) \quad f(x,y) = 2x^2 - y^2.$$

8. Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie grafico della funzione $f(x,y) = e^{-x^2 y}$ nel punto $(-1,1,\frac{1}{e})$.

   Soluzione: $z = \frac{1}{e}(2x - y + 4)$.

9. Tracciare le curve di livello della funzione $f(x, y) = 100 - 6y^2 - 4x^2$. Disegnare poi, in corrispondenza della curva di livello passante per il punto $P_0 = (1, 4)$, il vettore gradiente di f in P_o. Se un rilievo ha approssimativamente la forma del grafico di f e se una polla spontanea d'acqua si trova sul rilievo nel punto $A = (1, 0, 96)$, in che direzione e verso l'acqua sgorgherà verso il basso ?

   Soluzione: $\overline{v} = (8, 0)$.

IV. Integrali doppi e calcolo di volumi

1. Rappresentare graficamente l'insieme D e calcolare gli integrali doppi $\int\int_D f(x,y)\ dxdy$ nei seguenti casi :

   i) $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$, dove $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2x\}$;

   ii) $f(x,y) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$, dove $D = \{(x,y) : x \ge 0,\ y^2 \le 1,\ x^2 - 3 \le y \le x^2\}$;

   iii) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$, dove D è il triangolo curvilineo limitato dalla parabola $y^2 = x$ e dalle rette $x = 0$ e $y = 1$;

   iv) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, dove D è la porzione di piano limitata dalla parabola $y = \frac{x^2}{2}$ e dalla retta $x = y$.

   Soluzioni: i) $\frac{3}{2}$**; ii)** $\lg \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}$**; iii)** $\frac{1}{2}$**; iv)** $\lg 2$ **.**

2. Costruire i domini D le cui aree si esprimono con gli integrali doppi seguenti :

$$i) \quad \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} dy \ ;$$

$$ii) \quad \int_{0}^{\frac{1}{a}} dx \int_{ax^2}^{x} dy \ ;$$

$$iii) \quad \int_{0}^{a} dy \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \ .$$

   Calcolare tali aree a cambiare l'ordine di integrazione.

   Soluzioni: i) $\frac{9}{2}$**; ii)** $\frac{1}{6a^2}$**; iii)** $(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})a^2$**.**

3. Calcolare, con l'aiuto di un integrale doppio il volume

   i) della piramide i cui vertici sono $A_1 = (0,0,0)$, $A_2 = (2,0,0)$, $A_3 = (1,3,0)$ ed $A_4 = (0,0,1)$.

   ii) del solido compreso tra il paraboloide ellittico $z = 25 - x^2 - y^2$ ed il piano xy.

   Soluzioni: i) 1**; ii)** $\frac{625}{2}\pi$**.**

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D x \cos y \ dxdy \ ,$$

dove $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

Soluzione: $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$.

5. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \frac{x^3}{x^4+1}\, dxdy\ ,$$

dove $D = \{(x,y) : x \geq 0, \quad y \leq 1,\ x^2 - 4 \leq y \leq x^2\}$.

Soluzione: $\frac{5}{4}\lg 26 - \frac{1}{4}\lg 2 - 2 + \frac{1}{2}\arctan 5 - \frac{\pi}{8}$.

6. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D x^3\, dxdy\ ,$$

dove l'insieme D è costituito rispettivamente :

i) dal semicerchio $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$;

ii) dal cerchio $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Soluzioni: i) $\frac{4}{15}$**; ii)** 0**.**

7. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D yxe^{x^2y}\, dxdy\ ,$$

dove $D = [0,1] \times [0,1]$.

Soluzione: $\frac{e}{2} - 1$.

8. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \frac{x^2}{y^2}\, dxdy\ ,$$

dove D è la regione di piano delimitata dalle curve di equazione rispettivamente $y = \frac{1}{x}$, $y = x$ e $y = 3$.

Soluzione: $\frac{304}{243}$.

9. Rappresentare graficamente l'insieme D e calcolare, servendosi delle coordinate polari, l'integrale $\int\int_D \ f(x.y) \ dxdy$, in ciascuno dei seguenti casi :

$$i) \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \ ,$$

$$D = \{(x,y) : x+y \geq 0, \ x^2+y^2 \leq r^2\} \ ;$$

$$ii) \quad f(x,y) = x^2y^2 \ ,$$

$$D = \{(x,y) : y \leq 0, \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\} \ ;$$

$$iii) \quad f(x,y) = \sin^3(x^2+y^2) \ ,$$

$$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1, \ y \leq 0\} \ ;$$

$$iv) \quad f(x,y) = \cos^2(x^2+y^2) \ ,$$

$$D = \{(x,y) : 4 \leq x^2+y^2 \leq 9\} \ .$$

Soluzioni: i) $\frac{r^3}{3}\pi$**; ii)** $\frac{21}{16}\pi$**; iii)** $\frac{\pi}{6}[(\cos 1)^3 - 3\cos 1 + 2]$**; iv)** $\frac{\pi}{2}(5 + \cos 9 \sin 9 - \cos 4 \sin 4)$.

10. Calcolare il volume del solido compreso tra il paraboloide ellittico $2z = x^2 + y^2$ ed il piano $z = 9$ e quello del solido compreso tra il piano xy ed il paraboloide ellittico $z + 16 = x^2 + y^2$.

    Soluzioni: i) $V_1 = 81\pi$**,** $V_2 = 128\pi$**.**

11. Calcolare

$$\int\int_D \frac{(x^2-y^2)\arctan(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \ dxdy \ ,$$

dove D è l'intersezione della corona circolare, di centro $(0,0)$ e raggi $R = 4$ ed $r = 1$, con l'insieme $\{(x,y) \in \mathbf{R^2} : \quad x \leq y \leq 0\}$.

Soluzione: $4\arctan 16 - \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\log\frac{257}{2}$.

12. Calcolare

a)

$$\int\int_D \frac{x\cos^2(\sqrt{x^2+y^2})}{y^2}\ dxdy\ ,$$

dove D è l'intersezione della corona circolare, di centro $(0,0)$ e raggi $R=2$ ed $r=1$, con l'insieme $\{(x,y)\in\mathbf{R^2}:\quad -y\le x\le 0\}$;

b)

$$\int\int_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\ dxdy\ ,$$

dove D è la porzione di corona circolare, di centro $(0,0)$ e raggi $R=6$ ed $r=2$, situata nel secondo e terzo quadrante;

c)

$$\int\int_D \frac{x}{1+xy}\ dxdy\ ,$$

dove $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ 1\le x\le 4,\ \frac{1}{x}\le y\le 3\}$;

d)

$$\int\int_D \sqrt{a^2-x^2}\ \ dxdy$$

dove D è il triangolo avente per vertici i punti $(0,0)$, $(a,0)$ e (a,a);

e)

$$\int\int_A \frac{y}{1+xy}\ dxdy\ ,$$

dove $A=\{(x,y)\in\mathbf{R^2}:\ \frac{1}{y}\le x\le 1,\ 1\le y\le 6\}$.

Soluzioni: a) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}(1+\sin 2\cos 2-\sin 1\ cos1)$**; b)** $-\frac{416}{9}$**; c)** $\frac{13}{3}\lg 13-\frac{17}{3}\lg 2-3$**; d)**$\frac{a^3}{3}$ **; e)**$7\lg\frac{7}{2}-5$**.**

V. Momenti del primo ordine e del secondo ordine e baricentro

Nel piano riferito ad un sistema di assi cartesiani (O, x, y) sia S un sistema costituito da n particelle puntiformi $A_i = (x_i, y_i)$ di massa m_i, $i = 1, ..., n$.
Si definiscono **momento statico rispetto all'asse x** e **momento statico rispetto all'asse y del sistema** S, rispettivamente, i numeri:

$$S_x := \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \ , \quad S_y := \sum_{i=1}^{n} m_i x_i .$$

Sia S una lamina piana che occupa la regione D del piano, e con densità superficiale (= massa per unità di superficie) $\delta(x, y)$ e massa M.
Si definiscono **momento statico rispetto all'asse x** e **momento statico rispetto all'asse y di** S, rispettivamente, i numeri :

$$S_x := \int\int_D y \ \delta(x, y) \ dxdy, \quad S_y := \int\int_D x \ \delta(x, y) \ dxdy.$$

Si definisce **baricentro** di S, il punto (geometrico) G del piano nel quale può pensarsi concentrata tutta la massa di S, in modo che i momenti statici rispetto all'asse delle x e rispetto all'asse delle y di questo punto coincidono, rispettivamente, con quelli della lamina S. Dalle definizioni precedenti segue subito che G ha coordinate x_G, y_G date da:

$$\begin{aligned} x_G &= \tfrac{1}{M} \int\int_D \ x \ \delta(x, y) \ dxdy, \\ y_G &= \tfrac{1}{M} \int\int_D \ y \ \delta(x, y) \ dxdy. \end{aligned} \tag{24}$$

Nel caso particolare in cui la densità superficiale della lamina S è costante (e, per facilitare i conti, la supponiamo uguale ad 1), risulta $M = A_D$, dove A_D è l'area della regione D, e le formule del **momento statico rispetto all'asse x** e del **momento statico rispetto all'asse y di** S **(o di** D**)**, diventano, rispettivamente:

$$S_x := \int\int_D y \ dxdy, \quad S_y := \int\int_D x \quad dxdy;$$

mentre, quelle delle coordinate del baricentro G diventano, rispettivamente:

$$\begin{aligned} x_G &= \tfrac{1}{A_D} \int\int_D \ x \quad dxdy, \\ y_G &= \tfrac{1}{A_D} \int\int_D \ y \quad dxdy. \end{aligned} \tag{25}$$

Si definiscono, inoltre, **momento d'inerzia rispetto all'asse x e momento d'inerzia rispetto all'asse y**, rispettivamente i numeri:

$$J_x := \int\int_D y^2 \; dxdy,$$

$$J_y := \int\int_D x^2 \; dxdy.$$

Si definisce, infine, **momento centrifugo** il numero:

$$J_{x,y} := \int\int_D xy \; dxdy.$$

V.1 Proprietà del baricentro

Sia S una lamina piana che occupa la regione D del sistema di riferimento e con densità superficiale unitaria. Il baricentro G di S (o di D) soddisfa le seguenti proprietà

1. **Il momento statico calcolato rispetto ad un asse baricentrico è nullo.**

2. **Se il dominio D ha un asse di simmetria o un punto di simmetria, il baricentro appartiene all'asse, o, rispettivamente coincide con il punto.**

Dimostrazione: La proprietà 1. segue subito dalle (33) o dalle (34).
Proviamo la proprietà 2.. Possiamo sempre supporre, cambiando eventualmente sistema di riferimento, che l'asse di simmetria coincida con l'asse delle y. Per semplicità ci limitiamo a dimostrare la proprietà nel caso in cui D è x-semplice e nel caso in cui è y-semplice.
Se D è x-semplice ed ha l'asse delle y come asse di simmetria, allora $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -\alpha(y) \leq x \leq \alpha(y), c \leq y \leq d\}$, dove $\alpha(y)$ è una funzione non negativa.
Pertanto, ricordando che l'integrale di una funzione dispari calcolato in un intervallo simmetrico rispetto all'origine è nullo:

$$x_G = \frac{1}{A_D} \int\int_D x \; dxdy = \frac{1}{A_D} \int_c^d \left(\int_{-\alpha(y)}^{\alpha(y)} xdx \right) \; dy = 0$$

e G appartiene all'asse delle y.
Se invece D è y-semplice ed ha l'asse delle y come asse di simmetria, allora $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -a \leq x \leq a, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, dove $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sono due funzioni pari ed a è una costante positiva.

Pertanto, ricordando sempre che l'integrale di una funzione dispari calcolato in un intervallo simmetrico rispetto all'origine è nullo:

$$x_G = \frac{1}{A_D} \iint_D x \; dxdy = \frac{1}{A_D} \int_{-a}^{a} x \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy \right) \; dx$$

$$= \frac{1}{A_D} \int_{-a}^{a} x(\beta(x) - \alpha(x)) \; dx = 0$$

e anche in questo caso G appartiene all'asse delle y.

V.2 Teorema di trasposizione

Sia S una lamina piana con densità superficiale unitaria, sia D la regione del sistema di riferimento $(0, x, y)$ occupata dalla lamina e sia $G = (x_G, y_G)$ il baricentro di S. Operiamo un cambiamento di riferimento mediante una traslazione che porta l'origine degli assi nel baricentro G. I nuovi assi sono quindi $(O' = G, X', Y')$ e le formule del cambiamento di variabili sono date da:

$$x = x_G + X', \quad y = y_G + Y' \; .$$

Denotiamo con D' il traslato del dominio D. Se osserviamo che $A_D = A_{D'}$, operando nell'integrale doppio un cambiamento di variabili, e tenendo presente la proprietà 1. del baricentro, abbiamo:

$$\begin{aligned} J_y &= \int\int_D x^2 \; dxdy = \\ &= \int\int_{D'} (x_G + X')^2 \; dX'dY' = \\ &= \int\int_{D'} (x_G^2 + X'^2 + 2x_G X') \; dX'dY' = \\ &= x_G^2 \int\int_{D'} \; dX'dY' + \int\int_{D'} X'^2 \; dX'dY' + 2x_G \int\int_{D'} X' \; dX'dY' = \\ &= x_G^2 A_D + J_{Y'}. \end{aligned} \tag{26}$$

Ed analogamente:

$$J_x = y_G^2 A_D + J_{X'}. \tag{27}$$

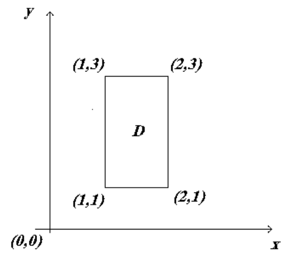
Dalle eguaglianze (35) e (36) si deduce subito il

Teorema di trasposizione: *I momenti d'inerzia, calcolati rispetto ad una coppia di assi paralleli ed equiversi ad assi assegnati, sono minimi quando sono calcolati rispetto alla coppia di assi baricentrici.*

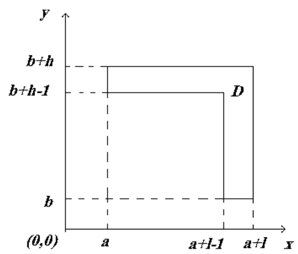
Esercizi:

1. Sia S una lamina piana che occupa la regione D del piano, ed avente densità superficiale unitaria. Si calcolino, per ciascuno delle regioni D qui di seguito indicati, i momenti statici, i momenti d'inerzia, il momento centrifugo e le coordinate del baricentro rispetto al riferimento segnato:

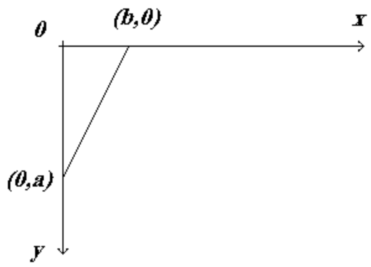
   i)



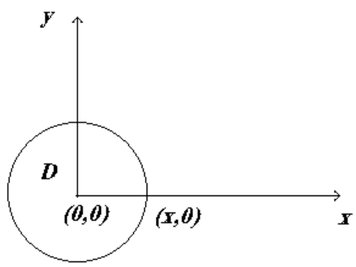
   ii)



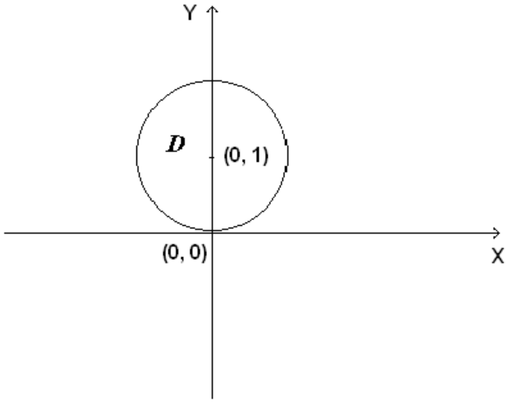
iii)



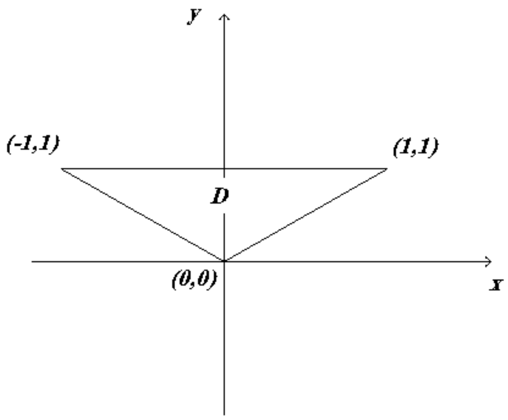
iv)



v)



vi)



Soluzioni: **i)** $S_x = 4, S_y = 3, J_x = \frac{26}{3}, J_y = \frac{14}{3}, J_{xy} = 6, G(\frac{3}{2}, 2)$**;**

ii) $S_x = (1-l)(b+h-\frac{1}{2}) + hb + \frac{h^2}{2},\ \ S_y = (h-1)(a+l-\frac{1}{2}) + al + \frac{l^2}{2},$

$J_x = \frac{l(b+h)^3}{3} - \frac{(l-1)(b+h-1)^3}{3} - \frac{b^3}{3},,\ \ J_y = \frac{h(a+l)^3}{3} - \frac{(h-1)(a+l-1)^3}{3} - \frac{a^3}{3},\ \ J_{xy} = \frac{1}{4}[(l-1)(2a+l-1)(2b+2h-1+h(2a+2l-1)(2b+h)],$

$G = \left(\frac{1}{h+l-1}\left[(h-1)(a+l-\frac{1}{2}) + al + \frac{l^2}{2}\right],\ \frac{1}{h+l-1}[(l-1)(b+h-\frac{1}{2}) + hb + \frac{h^2}{2}\right)\Big]$**;**

iii) $S_x = \frac{1}{6}a^2b, S_y = \frac{1}{6}ab^2, J_x = \frac{a^3b}{12},\ J_y = \frac{ab^3}{12}, J_{xy} = \frac{a^2b^2}{24}, G(\frac{b}{3}, \frac{a}{3})$**;**

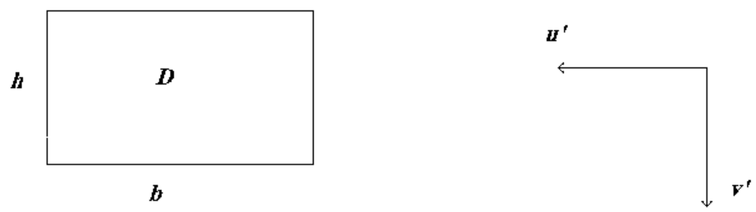
iv) $S_x = 0, S_y = 0, J_x = \frac{\pi x^4}{4}, J_y = \frac{\pi x^4}{4}, J_{xy} = 0, G(0,0)$**;**

v) $S_x = \pi, S_y = 0, J_x = \frac{5\pi}{4}, J_y = \frac{\pi}{4}, J_{xy} = 0, G(0,1)$**;**

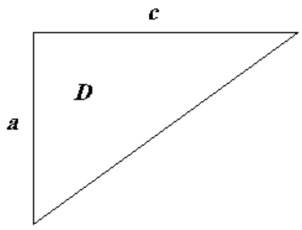
vi) $S_x = \frac{2}{3}, S_y = 0, J_x = \frac{1}{2}, J_y = \frac{1}{6}, J_{xy} = 0, G(0, \frac{2}{3})$**.**

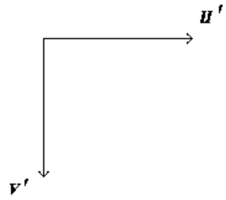
2. Calcolare i **minimi** momenti d'inerzia dei due seguenti domini D, rispetto ad una coppia di assi ortogonali, paralleli ed equiversi agli assi u' e v' delle figure di seguito riportate:

   i)



ii)





(Suggerimento: i minimi momenti d'inerzia sono quelli valutati rispetto agli assi baricentrici paralleli ed equiversi agli assi u' e v' (cfr. Teorema di trasposizione)).

Soluzioni: **i)** $J_{x'} = \frac{bh^3}{12}$, $J_{y'} = \frac{b^3h}{12}$; *ii)* $J_{x'} = \frac{a^3c}{36}$, $J_{y'} = \frac{ac^3}{36}$

3. Calcolare le coordinate del baricentro del triangolo di vertici $A = (0,0)$, $B = (7,0)$ e $C = (0,14)$.

   Soluzione: $G = (\frac{7}{3}, \frac{14}{3})$.

4. Calcolare le coordinate del baricentro ed il momento d'inerzia rispetto all'asse delle x della lamina piana, di materiale omogeneo e densità unitaria, il cui profilo è costituito dalle linee di equazione $x + y = 0$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$ con $y \geq 0$, e $x = 2$.

   Soluzione: $G = \left(\frac{3\pi+16}{3\pi+12}, -\frac{4}{3\pi+12}\right)$, $J_x = \frac{3\pi+32}{24}$.

5. Calcolare le coordinate del baricentro ed il momento d'inerzia rispetto all'asse delle x della lamina piana D, di materiale omogeneo e densità unitaria,

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R^2} : \ 0 \leq x \leq 2, \ (x-1)^2 + y^2 \geq 1, \ y \leq 1\} \quad .$$

   Soluzione: $G = (1, \frac{2}{3(4-\pi)})$, $J_x = \frac{16-3\pi}{24}$.

6. Calcolare le coordinate del baricentro ed il momento d'inerzia rispetto all'asse delle x della lamina piana di materiale omogeneo, di densità costante unitaria, avente la forma del trapezio di vertici $A = (-2,0)$, $B = (0,0)$, $C = (0,1)$ e $D = (-1,1)$.

   Soluzione: $G = (-\frac{7}{9}, \frac{4}{9})$, $J_x = \frac{5}{12}$.

PRIMA ESERCITAZIONE RIASSUNTIVA

1. Classificare la conica $\mathcal{C}$ di equazione:
$$x^2 - 4y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

2. Classificare la conica $\mathcal{C}$ di equazione:
$$x^2 + y^2 - 2xy + 8x + 1 = 0$$

3. Classificare la conica $\mathcal{C}$ di equazione:
$$x^2 - 3y^2 + 4x - 6y - 4 = 0$$

4. Classificare la conica $\mathcal{C}$ di equazione:
$$3x^2 - y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$$

5. Classificare la conica $\mathcal{C}$ di equazione:
$$x^2 + y^2 - 4xy - 30x - 87 = 0$$

6. Dire quali tra le seguenti quadriche

   $a)$ $4x^2 - 4y^2 = 5z$;

   $b)$ $6x^2 - 2y^2 - 6z^2 - 4 = 0$;

   $c)$ $x^2 - 3y^2 + z^2 - 4 = 0$;

   $d)$ $7x^2 + 7y^2 + 5z^2 - 1 = 0$;

   sono rigate e per ciascuna di esse scrivere le equazioni delle schiere di rette che le compongono.

   (**Soluzione:** a) e c))

7. Data la funzione
$$f(x, y) = 4x^2 - 2y^2$$
   scrivere l'equazione del piano tangente la superficie grafico di f nel punto $(1, -1, 2)$. Calcolare e **tracciare** poi:

   $i)$ le curve di livello di f passanti rispettivamente per il punto $P_0 = (1, -1)$ e per il punto $P_1 = (-1, 0)$;

   $ii)$ il vettore $\nabla f(1, -1)$.

   Disegnare infine la superficie grafico di f.

   (**Soluzione:** $z = 8x + 4y - 2$; $\nabla f(1, -1) = (8, 4)$)

8. Calcolare mediante un integrale doppio il volume del solido compreso tra il paraboloide ellittico di equazione $z = 3x^2 + 3y^2$ ed il piano $z = 12$.

(**Soluzione:** $V = 24\pi$)

9. Data la funzione
$$f(x, y) = 3x^2 + 6y^2$$
disegnare la superficie grafico e scrivere l'equazione del piano tangente la superficie grafico nel punto $(1, -1, 9)$. Calcolare inoltre e **tracciare**:

$i)$ le curve di livello di f passanti rispettivamente per il punto $P_0 = (1, -1)$ e per il punto $P_1 = (-1, 0)$;

$ii)$ il vettore $\nabla f(1, -1)$.

(**Soluzione:** $z = 6x - 12y - 9$; $\nabla f(1, -1) = (6, -12)$)

10. Data la funzione $f(x, y) = 3y^2 - 6x^2$ disegnare la superficie grafico e scrivere l'equazione del piano tangente la superficie grafico nel punto $(-1, 1, -3)$. Inoltre:

$i)$ calcolare e tracciare la curva di livello di f passante per il punto $P_0 = (-1, 1)$ e il vettore $\nabla f(-1, 1)$;

$ii)$ calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P_0 = (-1, 1)$ lungo la direzione del vettore $\vec{v} = (2, -1)$.

(**Soluzione:** $z = 12x + 6y + 9$; $\nabla f(-1, 1) = (12, 6)$; $\frac{18}{\sqrt{5}}$)

11. Calcolare
$$\int\int_D x^3 y dx dy$$
dove D è il quarto di cerchio centrato nell'origine, avente raggio $R = 3$ e situato nel 3^0 quadrante.

(**Soluzione:** $\frac{243}{8}$)

12. Mediante un integrale doppio calcolare il volume del solido compreso tra il paraboloide ellittico di equazione $z = -2x^2 - 2y^2 + 8$ ed il piano xy.

13. Calcolare le coordinate del baricentro ed il momento centrifugo della lamina di materiale omogeneo, di densità costante unitaria, avente la forma del triangolo di vertici $A = (-2, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 0)$.

(**Soluzione:** $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$; $J_{xy} = -\frac{1}{8}$)

14. Data la funzione $f(x, y) = x^2 + 5y^2$ disegnare la superficie grafico e scrivere l'equazione del piano tangente la superficie grafico nel punto $(-2, 1, 9)$. Inoltre:

    $i)$ calcolare e **tracciare** la curva di livello di f passante per il punto $P_0 = (-2, 1)$ e il vettore $\nabla f(-2, 1)$;

    $ii)$ calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P_0 = (-2, 1)$ lungo la direzione del vettore $\vec{v} = (8, 6)$.

    (**Soluzione:** $z = -4x + 10y - 9$; $\nabla f(-2, 1) = (-4, 10)$; $\frac{14}{5}$)

15. Calcolare le coordinate del baricentro ed il momento d'inerzia rispetto all'asse delle x della lamina di materiale omogeneo, di densità costante unitaria, avente la forma del semicerchio, centrato nell'origine, di raggio uguale a 3 e situato nel 1^0 e nel 2^0 quadrante.

    (**Soluzione:** $(0, \frac{4}{\pi})$; $J_x = \frac{81}{8}\pi$)

16. Calcolare le coordinate del baricentro ed i momenti d'inerzia della lamina di materiale omogeneo, di densità costante unitaria, avente la forma del trapezio di vertici $A = (0, 2)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, -1)$ e $D = (0, -1)$.

    (**Soluzione:** $(\frac{5}{12}, \frac{1}{12})$; $J_x = 1$; $J_y = \frac{1}{2}$)

Domanda a risposta multipla

1. Quale fra le seguenti affermazioni, riferite alle coniche, è **vera**?

    A le coppie di rette incidenti, o parallele, o coincidenti sono coniche non degeneri;

    B la parabola, l'ellisse e l'iperbole sono coniche degeneri;

    C l'ellisse e l'iperbole hanno due assi di simmetria, un centro e due fuochi;

    D l'iperbole ha un asse di simmetria, un fuoco ed un centro di simmetria.

2. Quale fra le seguenti affermazioni, riferite alle coniche, è **vera**?

    A le coppie di rette incidenti, o parallele, o coincidenti sono coniche degeneri;

    B la parabola e l'iperbole sono coniche degeneri;

    C l'ellisse e l'iperbole hanno due assi di simmetria, un centro e un fuoco;

    D la parabola ha due assi di simmetria e un fuoco.

3. La superficie grafico e le curve di livello della funzione

$$f(x, y) = 5x^2 + 8y^2$$

sono rispettivamente

A un piano ed ellissi;

B un paraboloide iperbolico ed iperboli;

C un paraboloide ellittico ed ellissi;

D un piano e rette;

E nessuna delle precedenti risposte è corretta.

4. Quali fra le seguenti quadriche sono rigate?

A solo le quadriche degeneri sono rigate;

B il paraboloide iperbolico e l'iperboloide a due falde;

C l'iperboloide ad una falda e l'iperboloide a due falde;

D l'iperboloide ad una falda e il parabolide iperbolico;

E l'ellissoide, l'iperboloide ad una falda e il paraboloide iperbolico.

5. Quale tra le seguenti proposizioni è corretta?

A il vettore $\nabla f(x_0, y_0)$ è tangente in $P_0 = (x_0, y_0)$ alla curva di livello di f passante per P_0;

B le curve di livello di una funzione $f(x, y)$ sono quelle curve del piano xy in cui la funzione f ha la minima crescita;

C le curve di livello di una funzione $f(x, y)$ sono quelle curve del piano xy in cui la funzione f ha la massima crescita;

D il vettore $\nabla f(x_0, y_0)$ è ortogonale alla retta tangente in $P_0 = (x_0, y_0)$ alla curva di livello di f passante per P_0;

E nessuna delle precedenti risposte è corretta.

6. Quali tra le seguenti quadriche

$a)$ $4x^2 + 4y^2 - z^2 - 8 = 0$;

$b)$ $x^2 - 2y^2 = 5z$;

$c)$ $3x^2 + y^2 - 3z^2 - 6 = 0$;

$d)$ $x^2 - 7y^2 - 7z^2 - 10 = 0$;

sono di rotazione ed attorno a quale asse?

A a) attorno all'asse z e c) attorno all'asse y;

B a) attorno all'asse z e d) attorno all'asse x;

C soltanto c) attorno all'asse y;

D b) attorno all'asse z e d) attorno all'asse x;

E nessuna delle precedenti risposte è corretta.

7. Supponiamo che il rilievo di una regione abbia la forma data in prima approssimazione dal grafico della funzione $f(x, y) = -3x^2 - y^2 + 16$. Se un individuo si trova sulla superficie in corrispondenza del punto $P_0 = (1, 1, 12)$, in che direzione e verso a partire da P_0 dovrà spostarsi per **perdere** quota il più rapidamente possibile?

   A nella direzione della tangente alla curva di livello passante per il punto $(1, 1)$;

   B nella direzione e verso del vettore $\vec{v} = (-6, 2)$;

   C nella direzione e verso del vettore $\vec{v} = (-6, -2)$;

   D nella direzione e verso del vettore $\vec{v} = (6, 2)$;

   E nella direzione e verso del vettore $\vec{v} = (6, -2)$.

8. Quali tra le seguenti quadriche

   a) $4y^2 - z^2 = 8x$;

   b) $x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$;

   c) $6x^2 + 6y^2 = 3z$;

   d) $3x^2 + 7y^2 - z^2 - 15 = 0$;

   rappresentano, nell'ordine, un paraboloide iperbolico ed una sfera?

   A a) e b);

   B a) e d);

   C d) e b);

   D d) e c);

   E nessuna delle precedenti risposte è corretta.

9. In una regione piana la temperatura, espressa in gradi è data dalla legge $T(x, y) = 2x^2 + y^2$. In che direzione e verso **diminuisce** più rapidamente la temperatura nel punto $P_0 = (1, 1)$?

   A nella direzione e verso del vettore $\vec{v} = (4, 2)$;

B nella direzione e verso del vettore $\vec{v} = (4, -2)$;

C nella direzione e verso del vettore $\vec{v} = (-4, 2)$;

D nella direzione e verso del vettore $\vec{v} = (-4, -2)$;

E nella direzione della tangente alla curva di livello per P_0.

10. Le quadriche a punti ellittici sono

A i coni ed i cilindri algebrici del secondo ordine;

B l'ellissoide, l'iperboloide ad una falda e il paraboloide ellittico;

C l'ellissoide, l'iperboloide a due falde e il paraboloide ellittico;

D l'iperboloide ad una falda e il paraboloide iperbolico;

E nessuna delle precedenti risposte è corretta.

11. Quale fra le seguenti affermazioni riferite ad una lamina piana di materiale omogeneo e di densità costante è **falsa**?

A se la lamina ha un asse di simmetria il baricentro appartiene a questo asse;

B i monenti d'inerzia sono sempre o nulli o positivi;

C i monenti statici calcolati rispetto ad assi baricentrici sono sempre nulli;

D il suo baricentro appartiene alla lamina;

E nessuna delle precedenti risposte è corretta.

12. Le seguenti quadriche

$a)$ $2x^2 - y^2 + 2z^2 - 10 = 0$;

$b)$ $7x^2 + y^2 = 5z$;

$c)$ $4x^2 - y^2 - 4z^2 - 8 = 0$;

$d)$ $x^2 + 3y^2 + z^2 - 9 = 0$;

rappresentano nell'ordine

A un iperboloide a due falde, un paraboloide iperbolico, un iperboloide ad una falda, un ellissoide;

B un iperboloide ad una falda, un paraboloide ellittico, un iperboloide a due falde, un ellissoide;

C un ellissoide, un paraboloide ellittico, un iperboloide a due falde, un iperboloide ad una falda;

D un iperboloide ad una falda, un paraboloide iperbolico, un iperboloide a due falde, un ellissoide;

E nessuna delle precedenti risposte è corretta.

13. Le quadriche a punti parabolici sono

    A la sfera e l'iperboloide ad una falda;

    B i coni ed i cilindri algebrici del secondo ordine;

    C l'ellissoide, l'iperboloide a due falde e il paraboloide iperbolico;

    D l'iperboloide a due falde e il paraboloide ellittico;

    E nessuna delle precedenti risposte è corretta.

14. La superficie grafico e le curve di livello della funzione

$$f(x, y) = 8x^2 - 3y^2$$

    sono rispettivamente

    A un piano e circonferenze;

    B un paraboloide ellittico ed ellissi;

    C un piano e rette;

    D un paraboloide iperbolico ed iperboli;

    E nessuna delle precedenti risposte è corretta.

15. Quali tra le seguenti quadriche

    $a)$ $x^2 + y^2 - z^2 - 10 = 0$;

    $b)$ $2x^2 - 4y^2 - 2z^2 - 7 = 0$;

    $c)$ $4x^2 - 4y^2 = 6z$;

    $d)$ $6x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0$;

    sono rigate?

    A soltanto $c)$;

    B $b)$ e $c)$;

    C soltanto $b)$;

    D $a)$ e $c)$;

    E nessuna delle precedenti risposte è corretta.

16. In una mappa topografica i corsi d'acqua (che scorrono nella direzione di massima pendenza)

    A tagliano tangenzialmente le curve di livello;

    B tagliano ad angolo acuto le curve di livello;

    C tagliano ad angolo retto le curve di livello;

    D tagliano ad angolo ottuso le curve di livello;

    E nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Soluzioni: 1 C; 2 A; 3 C; 4 D; 5 D; 6 B; 7 D; 8 A; 9 D; 10 C; 11 D; 12 B; 13 B; 14 D; 15 D; 16 C.

VI. Massimi e minimi liberi e vincolati

VI.1 Massimi e minimi liberi

Definizione (minimo e massimo relativo di una funzione di due variabili).
Data una funzione di due variabili $f(x, y)$, definita in un insieme $A \subseteq R^2$, un punto $(x_0, y_0) \in A$ si dice

- **punto di minimo relativo** per $f(x, y)$ se **esiste un intorno di** (x_0, y_0) tale che $\forall$ (x, y) **di** A **appartenente a tale intorno** si verifica che
$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y).$$
- **punto di massimo relativo** per $f(x, y)$ se **esiste un intorno di** (x_0, y_0) tale che $\forall$ (x, y) **di** A **appartenente a tale intorno** si verifica che
$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y).$$

Definizione (minimo e massimo assoluto di una funzione di due variabili)
Data una funzione di due variabili $f(x, y)$ definita in un insieme $A \subseteq R^2$, un punto $(x_0, y_0) \in A$ si dice

- **punto di minimo assoluto** per $f(x, y)$ se $\forall$ $(x, y) \in A$ si verifica che
$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y).$$
- **punto di massimo assoluto** per $f(x, y)$ se $\forall$ $(x, y) \in A$ si verifica che
$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y).$$

Il numero reale $f(x_0, y_0)$ prende il nome, a seconda dei casi, di *massimo* o *minimo relativo* o *assoluto*. Sull'esistenza dei massimi e minimi assoluti per una funzione di due variabili vale il seguente:
Teorema (di Weierstrass). *Una funzione di due variabili $f(x, y)$ definita e* **continua in un insieme chiuso e limitato** $K \subseteq R^2$ *è dotata di minimo e di massimo assoluto.*

VI.2 Ricerca dei massimi e dei minimi relativi (liberi) di una funzione di due variabili.

Per la ricerca dei massimi e dei minimi relativi (liberi) di una funzione di due variabili dobbiamo fare riferimento al seguente:

Teorema (di Fermát). *Sia $f(x,y)$ una funzione di due variabili definita in un insieme aperto $A \subseteq R^2$. Sia $(x_0, y_0) \in A$ un punto di massimo o di minimo relativo per f e supponiamo che f ammetta derivate parziali prime in tale punto. Allora*

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= 0 \\ f_y(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned} \tag{28}$$

I punti (x_0, y_0) in cui si verificano le condizioni (30) prendono il nome di **punti critici o stazionari**.
Il Teorema precedente fornisce solamente **una condizione necessaria ma non sufficiente** per la ricerca dei massimi e dei minimi relativi di una funzione di due variabili. In altre parole potrebbero esistere dei punti (x_0, y_0) in cui $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$, senza però che tali punti siano di massimo o di minimo relativo.
Ad esempio, il punto $(0, 0)$ è un punto critico per la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$, ma non è né un punto di massimo, né un punto di minimo, come è facile vedere osservando la funzione grafico.

Dobbiamo allora introdurre delle ulteriori condizioni che ci permettano di definire la natura del punto critico. Per fare ciò dobbiamo prima di tutto dare la seguente:

Definizione (di determinante hessiano) Data una funzione $f(x, y)$ definita in un insieme $A \subseteq R^2$, continua con le derivate prime e seconde, prende il nome di *determinante hessiano* il seguente determinante simmetrico:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}$$

Possiamo allora enunciare il seguente:

Teorema (per la ricerca dei massimi e minimi). *Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili definita in un insieme aperto $A \subseteq R^2$, continua con le derivate prime e seconde e sia (x_0, y_0) un punto critico di A. In base al valore del determinante $H(x_0, y_0)$ si hanno i seguenti casi:*

- $H(x_0, y_0) > 0$ *e* $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, *allora* (x_0, y_0) *è un punto di minimo relativo;*
- $H(x_0, y_0) > 0$ *e* $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, *allora* (x_0, y_0) *è un punto di massimo relativo;*
- $H(x_0, y_0) < 0$, *allora* (x_0, y_0) *non è un punto di massimo nè un punto di minimo relativo e prende il nome di punto di sella;*
- $H(x_0, y_0) = 0$, *niente può essere detto a priori su* (x_0, y_0).

Esempio 1.
Si studino i massimi ed i minimi relativi (liberi) della funzione

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2.$$

Sappiamo che condizione necessaria affinchè un punto (x_0, y_0) sia di massimo o di minimo relativo è che in esso si annullino le derivate parziali prime della funzione. Calcoliamo allora le due derivate parziali prime. Derivando la funzione rispetto ad x si ottiene:

$$f_x(x,y) = 6x^2 - 6y$$

derivando invece la funzione rispetto ad y si ottiene:

$$f_y(x,y) = -6x + 6y$$

Risolvendo ora il seguente sistema

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$$

si trova che i punti critici della funzione sono $(0,0)$ e $(1,1)$.
Per classificare i punti critici occorre calcolare le derivate parziali seconde:

$$f_{xx}(x,y) = 12x \quad f_{xy}(x,y) = -6 \quad f_{yy}(x,y) = 6.$$

Quindi l'Hessiano della funzione è:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix}$$

Nel punto $(0,0)$ risulta $H(0,0) = -36 < 0$ per cui il punto $(0,0)$ è un punto di sella. Nel punto $(1,1)$ risulta $H(1,1) = 36 > 0$ ed $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$ per cui il punto $(1,1)$ è un punto di minimo relativo.

ESERCIZI

1. Data la funzione

$$f(x,y) = \log(y - 3x)$$

$i)$ rappresentare nel piano xy il suo insieme di definizione;

$ii)$ calcolare la direzione ed il verso di massima pendenza di f nel punto $P = (-2,-5)$;

$iii)$ dire se la funzione ammette punti di massimo o di minimo relativi o assoluti (ed in caso di risposta positiva calcolarli).

Soluzione: i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 3x\}$; **ii)** $\overline{v} = (-3,1)$; **iii)** No.

2. Determinare gli eventuali punti critici e gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo delle funzioni:

$$i) \quad f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2 \ ;$$

$$ii) \quad f(x,y) = (x-1)^2 - 2y^2 \ ;$$

$$iii) \quad f(x,y) = (x^2 - 2y^2)e^{x-y} \ ;$$

$$iv) \quad f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 \ .$$

Soluzioni: **i)** $(1,0)$ minimo relativo; **ii)** non vi sono punti di massimo o di minimo relativo; **iii)** $(-4,-2)$ massimo relativo; **iv)** $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ minimi relativi, $(0,0)$ non è punto di massimo o di minimo relativo.

VI.3 Massimi e minimi vincolati di funzioni di due variabili

In molte applicazioni sorge la necessità di calcolare i valori massimi o minimi di una funzione non su tutto l'insieme di definizione A, ma nel sottoinsieme di A costituito da tutti i punti (x, y) che soddisfano alla condizione

$$g(x, y) = 0.$$

La funzione $g(x, y)$ è detta *funzione di vincolo.*
Si parla allora di *ricerca di massimi e minimi vincolati* per funzioni di due variabili.
Per trovare i massimi ed i minimi vincolati si può procedere o con il *metodo di sostituzione diretta* o con il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange.*

VI.4 Metodo di sostituzione diretta

Il metodo di sostituzione diretta, si usa quando dal vincolo $g(x, y) = 0$, si può ricavare la y in funzione della x: $y = \phi(x)$. Allora si sostituisce il valore di y nella espressione della funzione e si ottiene una funzione di una sola variabile: $h(x) = f(x, \phi(x))$. (Un ragionamento simmetrico viene fatto se dal vincolo $g(x, y) = 0$, si può ricavare la x in funzione della y). Si procede quindi studiando i massimi ed i minimi della funzione di una sola variabile $h(x)$ con i metodi già noti.

Esempio 2.
Data la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ si determinino, mediante sostituzione diretta, gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo della funzione $f(x, y)$ sotto il vincolo $\frac{5}{4} - \frac{3}{4}x - y = 0$. Dapprima esplicitiamo dall'equazione del vincolo la variabile y in funzione di x. Con un semplice calcolo si ottiene $y = \frac{5}{4} - \frac{3}{4}x$.
Procediamo quindi a sostituire il valore di y nell' espressione della funzione e otteniamo la funzione di una variabile:

$$h(x) = x^2 + (\frac{5}{4} - \frac{3}{4}x)^2.$$

Dobbiamo così studiare i punti di massimo o di minimo della funzione

$$h(x) = \frac{25}{16}x^2 - \frac{15}{8}x + \frac{25}{16}.$$

Calcolando la derivata prima di $h(x)$ abbiamo

$$h'(x) = \frac{25}{8}x - \frac{15}{8}.$$

La derivata prima $h'(x)$ si annulla nel punto $x = \frac{3}{5}$ che risulta un punto di minimo.
Il minimo della funzione h è il valore $h(\frac{3}{5}) = 1$. Concludiamo che il minimo della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ soggetta al vincolo $y = \frac{5}{4} - \frac{3}{4}x$ è 1.

Esercizio

1. Si determinino gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo di $f(x,y) = xy$ sul vincolo $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$.

   Soluzione: punto di max = $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

VI. 5 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si usa, preferibilmente, quando **il vincolo** $g(x,y) = 0$ **rappresenta una curva chiusa e limitata** (per esempio: circonferenza o, in generale, ellisse).

Una condizione **necessaria** perchè un punto sia o di massimo o di minimo vincolato è espressa dal seguente:

Teorema (dei moltiplicatori di Lagrange). *Sia $f(x,y)$ una funzione di due variabili definita in un insieme aperto $A \subseteq R^2$ continua con le derivate prime. Sia inoltre $g(x,y)$ continua con le derivate prime. Se $P_0 = (x_0, y_0)$ è un punto di massimo o di minimo vincolato per f sotto il vincolo $g(x,y) = 0$ e se $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0,0)$, allora esiste un numero reale λ^* (detto moltiplicatore) tale che:*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda^* \nabla g(x_0, y_0) \ . \tag{29}$$

Dimostrazione. Se $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$, la condizione (31) è verificata ponendo $\lambda^* = 0$. Supponiamo quindi $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$. La curva vincolo $g(x,y) = 0$ la possiamo vedere come la curva di livello della funzione $g(x,y)$, passante per il punto $P_0 = (x_0, y_0)$, e corrispondente al valore zero. Il vettore $\nabla g(x_0, y_0)$ è (per ipotesi) un vettore non nullo e ortogonale alla tangente la curva vincolo nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Se per assurdo la (31) non fosse verificata, i due vettori non nulli $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ non sarebbero paralleli. Pertanto $\nabla f(x_0, y_0)$ avrebbe una proiezione non nulla $\vec{v}$ lungo la direzione della tangente alla curva vincolo in P_0. Pertanto la derivata direzionale di f lungo la direzione di $\vec{v}$ è positiva e negativa lungo la direzione $-\vec{v}$. Questo significa che se ci allontaniamo da P_0 sulla curva vincolo in direzione di $\vec{v}$, la f cresce e P_0 non può essere punto di massimo vincolato sulla curva, mentre se ci allontaniamo da P_0 sulla curva vincolo in direzione di $-\vec{v}$, la f decresce e P_0 non può essere punto di minimo vincolato sulla curva. E ciò è in contraddizione con l'ipotesi che P_0 è un punto di massimo o di minimo vincolato per f.

Nota: I punti (x_0, y_0) tali che $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0,0)$ prendono il nome di *punti regolari per il vincolo* $g(x,y) = 0$.

Introduciamo la seguente:

Definizione (di funzione Lagrangiana). Data una funzione di due variabili $f(x, y)$ definita in un insieme aperto $A \subseteq R^2$ e data una funzione vincolo $g(x, y)$, prende il nome di **funzione Lagrangiana** la seguente funzione a tre variabili:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

con $\lambda \in R$.

Il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange afferma che se (x_0, y_0) è un punto, regolare per il vincolo, di massimo o di minimo vincolato sulla curva $g(x, y) = 0$, allora esiste un λ^* tale che il punto (x_0, y_0, λ^*) è un punto critico per la funzione Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$. Infatti i punti critici di $\mathcal{L}$ sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = f_x - \lambda g_x = 0 \\ \\ \mathcal{L}_y = f_y - \lambda g_y = 0 \\ \\ \mathcal{L}_\lambda = -g = 0 \end{cases} \tag{30}$$

dove le prime due relazioni coincidono con la condizione (31), mentre la terza esprime la condizione di vincolo. Da quanto detto si evince il seguente modo di procedere, noto come *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*:
i) si isolano eventuali punti non regolari per il vincolo $g(x, y) = 0$;
ii) si cercano i punti critici della Lagrangiana, e cioè le soluzioni del sistema (32);
iii) si esamina la natura dei punti trovati in **i)** e **ii)**.

Nel caso in cui il vincolo **è un insieme chiuso e limitato**, e la funzione f è continua, è utile applicare il teorema di Weierstrass. Infatti in tale caso, per quest'ultimo teorema, i punti di massimo e di minimo assoluto della f sotto il vincolo $g(x, y) = 0$ esistono: pertanto si calcolano i valori che la funzione assume nei punti trovati in **i)** e **ii)** e dal loro confronto si stabilisce qual è il massimo assoluto e qual è il minimo assoluto della funzione (sotto il vincolo dato), come si vede nell'esempio seguente.

Esempio 3.
Data la funzione $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 1$ si determinino, mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, il massimo ed il minimo assoluti della funzione $f(x, y)$ sul vincolo $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
Il vincolo è una circonferenza che è un insieme chiuso e limitato. La funzione vincolo è $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Poichè $g_x(x, y) = 2x$ e $g_y(x, y) = 2y$, non esistono punti del

vincolo non regolari (l'unico punto che annulla entrambe le derivate parziali prime è $(0,0)$ che non appartiene al vincolo). Quindi non vi sono punti relativi ad **i)**.
Scriviamo la funzione Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Calcoliamo i punti relativi a **ii)**. Cerchiamo pertanto le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \quad (\text{cioè } g(x,y) = 0) \end{cases}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ 4y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si individuano i seguenti quattro punti di $\mathbf{R}^2$:

$$(0,1) \quad (0,-1) \quad (-1,0) \quad (1,0).$$

Si noti che non è necessario ai nostri fini calcolare anche i valore del parametro λ corrispondenti ai quattro punti di sopra.
Poichè il vincolo è una circonferenza, che è un insieme chiuso e limitato, applichiamo il Teorema di Weierstrass che ci assicura che il massimo e il minimo assoluti della funzione f sul vincolo dato esistono. Per determinarli basta calcolare il valore della funzione f nei quattro punti trovati. Risulta:
$f(0,1) = 3$
$f(0,-1) = 3$
$f(-1,0) = 2$
$f(1,0) = 2.$
Possiamo concludere che il minimo assoluto della funzione è 2 e ci sono due punti nei quali la funzione assume valore minimo, rispettivamente i punti $(-1,0)$ e $(1,0)$; il massimo assoluto della funzione è 3 e ci sono due punti nei quali la funzione assume valore massimo, rispettivamente i punti $(0,-1)$ e $(0,1)$.

Esercizi.

1. Si determinino gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo di $f(x, y) = xy$ sul vincolo $S = \{(x, y) \in I\!R^2 : x^2 + 4y^2 - 1 = 0\}$.

   Soluzione: punto di max $= (\frac{\pm\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{4})$, $\;$ punto di min $= (\frac{\pm\sqrt{2}}{2}, \frac{\mp\sqrt{2}}{4})$.

2. Si determinino i valori di massimo e di minimo assoluti di $f(x, y) = x^2 - y^2$ sul vincolo $S = \{(x, y) \in I\!R^2 : x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0\}$.

   Soluzione: min $f = -9$, max $f = \frac{7}{2}$.

3. Calcolare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^4$$

   sotto il vincolo $S = \{(x, y) \in I\!R^2 : \; x^2 + y^2 = 1\}$. **Soluzione**: $min\ f = 0$, $max f = 1$.

4. Determinare i punti della curva $2x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$ che si trovano più vicini all'origine e quelli che si trovano più lontani all'origine.

   Soluzione: $(2, \pm 2)$, $(1 - \sqrt{3}, 0)$.

VII. Equazioni differenziali

Esercizi proposti

1. Trovare l'unica soluzione dei seguenti problemi di Cauchy in un intervallo opportuno:

$$i) \quad \begin{cases} y' &= \frac{\sqrt{1-y^2}}{t} \\ y(\frac{1}{2}) &= 0 \end{cases} ; \qquad ii) \quad \begin{cases} y' &= \frac{y^2}{t} \\ y(1) &= 1 \end{cases} ;$$

$$iii) \quad \begin{cases} y' &= y \ \sin t \\ y(0) &= 4 \end{cases} ; \qquad iv) \quad \begin{cases} y' &= (1+y^2)\sin t \\ y(0) &= 0 \end{cases} .$$

Soluzioni:

$$i) \quad y(t) = \sin(\log|t| - \log\tfrac{1}{2}); \quad ii) \quad y(t) = \tfrac{-1}{log|t|-1};$$

$$iii) \quad y(t) = 4e^{1-cost}; \qquad iv) \quad y(t) = \tan(-\cos t + 1).$$

2. Determinare le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

$$i) \quad \begin{cases} y' &= -y\cos t + \sin t \cos t \\ y(0) &= 1 \end{cases} ; \qquad ii) \quad \begin{cases} y' &= \frac{ty+t^3}{t^2} \\ y(1) &= 0 \end{cases} .$$

Soluzioni:

$$i) \quad y(t) = e^{-\sin t}(e^{\sin t}(\sin t - 1) + 2); \quad ii) \quad y(t) = t^2 - t.$$

3. Trovare nell'intervallo $(0, \pi)$ l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea:

$$y' = cotg(t)\ y.$$

Soluzione: $y(t) = c\sin t$, con $c \in R$.

4. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari complete:

$$i) \quad y' = 4y + 1 \ ; \qquad ii) \quad y' = -y + t \ ;$$

$$iii) \quad y' = -y + e^t \ .$$

Soluzioni:

$$i) \quad y(t) = ce^{4t} - \tfrac{1}{4}; \qquad ii) \quad y(t) = ce^{-t} + t - 1;$$

$$iii) \quad y(t) = \tfrac{1}{2}e^t + ce^{-t},$$

con $c \in \mathbf{R}$.

5. Risolvere l'equazione differenziale lineare del secondo ordine: $y'' = t^2 - 3t$.

   Soluzione: $y(t) = c_1 + c_2 t + \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{2}t^3$, con $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

6. Calcolare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

$$i) \quad y'' = -\cos t \ ; \qquad ii) \quad y'' = e^{-3t} + \sin t.$$

   Soluzioni:

$$i) \quad y(t) = c_1 + c_2 t + cost; \quad ii) \quad y(t) = c_1 + c_2 t + \tfrac{1}{9}e^{-3t} - \sin t,$$

   con $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

7. Calcolare l'integrale generale di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali lineari del secondo ordine:

$$\begin{array}{lll} i) & y'' + a^2 y = 0, & a \neq 0; \\ ii) & y'' - a^2 y = 0, & a \neq 0; \\ iii) & y'' - 3y' + 2y = 0; & \\ iv) & y'' - 2y' + y = 0. & \end{array}$$

   Soluzioni:

$$i) \ \ y(t) = c_1 \cos at + c_2 \sin at; \quad ii) \ \ y(t) = c_1 e^{-at} + c_2 e^{at};$$

$$iii) \ \ y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}; \qquad iv) \ \ y(t) = (c_1 + c_2 t)e^t,$$

   con $c_1, c_2 \in R$.

8. Calcolare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del secondo ordine:

$$\begin{array}{ll} i) & y'' - y' = 2t^2 - t; \\ ii) & y'' - y' + 2y = 4\sin 2t; \\ iii) & y'' + y' - 2y = 8e^t; \\ iv) & y'' + 2y = 3t - 2; \\ v) & y'' + 2y' - y = 7e^t; \\ vi) & y'' + y = \sin t. \end{array}$$

Soluzioni:

$$\begin{array}{ll} i) & y(t) = c_1 + c_2 e^t - t(\frac{2}{3}t^2 + \frac{3}{2}t + 3); \\ ii) & y(t) = c_1 e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{7}}{2}t + c_2 e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{7}}{2}t + \cos 2t - \sin 2t; \\ iii) & y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^x + \frac{8}{3}te^t; \\ iv) & y(t) = c_1 \cos \sqrt{2}t + c_2 \sin \sqrt{2}t + \frac{3}{2}t - 1; \\ v) & y(t) = c_1 e^{(-1-\sqrt{2})t} + c_2 e^{(-1+\sqrt{2})t} + \frac{7}{2}e^t; \\ vi) & y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{t}{2}\cos t, \end{array}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

9. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y & = & \cos t \\ y(\pi) & = & 0 \\ y'(\pi) & = & 0 \end{cases}$$

Soluzione: $y(t) = \frac{1}{3}\cos 2t + \frac{1}{3}\cos t$.

10. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' & = & 5y\left(1 - \frac{y}{60}\right) \\ y(0) & = & 1000 \end{cases}$$

Dire poi alla luce dei modelli studiati quali “fenomeni” possono essere descritti dall’equazione $y' = 5y\ (1 - \frac{y}{60})$.

Cosa rappresenta la costante 60?

Soluzione: $y(t) = \frac{3000\ e^{5t}}{50e^{5t} - 47}$.

VIII. Oscillatore armonico ad un grado di libertà

PREMESSE
Le funzioni $y = \cos t$ e $y = \sin t$ hanno periodo $T = 2\pi$.
Le funzioni $y = \cos 2t$ e $y = \sin 2t$ hanno periodo $T = \pi$.
Le funzioni $y = \cos \omega t$ e $y = \sin \omega t$ hanno periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

ω si dice *pulsazione*.

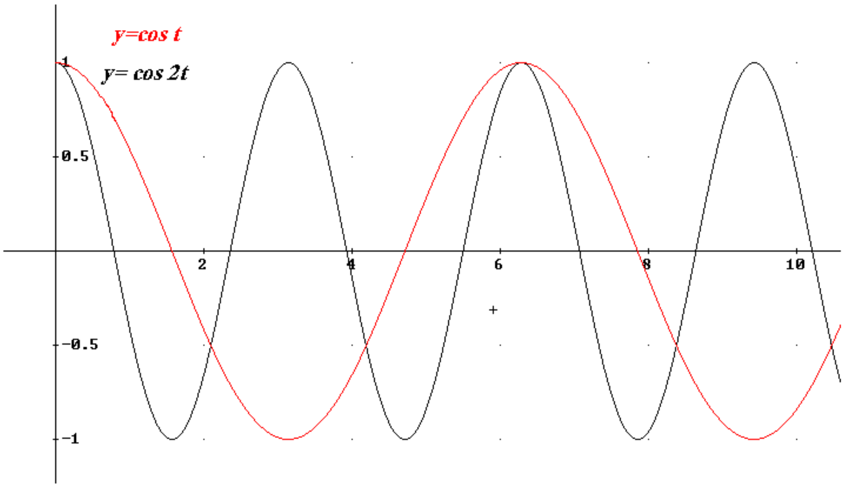


Figure 12: Le funzioni $\cos t$ e $\cos 2t$

VIII.1 Oscillazioni libere

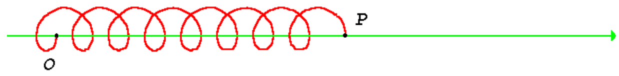


Figure 13: Punto materiale collegato ad una molla

Supponiamo che un punto materiale P di massa m sia soggetto ad una forza elastica attrattiva N, esercitata per esempio da una molla di costante k. N è una forza centrale, proporzionale alla distanza che il punto ha da un punto O, coincidente con la posizione a riposo della molla. Fissato un verso sulla retta OP e indicando con $y(t)$ la distanza di P da O all'istante t

$$N = -ky, \qquad k > 0.$$

Se la velocità iniziale v del punto é radiale, cioé diretta come la retta OP, il movimento del punto si svolgerá sulla retta OP.
Essendo $F = m{\cdot}a$, dove F è la risultante delle forze agenti sul corpo, si ha $my'' = -ky$. Ponendo $\omega^2 = \frac{k}{m}$, l'equazione del moto é

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

La cui soluzione è data da

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

che si puó scrivere come $y(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$.

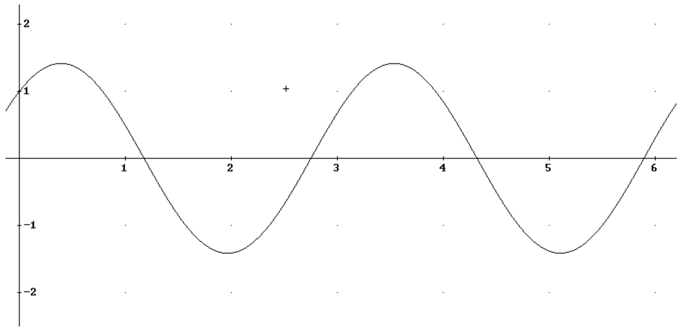


Figure 14: $y(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$.

Pertanto un punto materiale di massa m soggetto ad una forza elastica di costante k si muove di moto armonico con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

VIII.2 Oscillazioni libere smorzate

Supponiamo che sul punto P, oltre alla forza elastica $N = -ky$, agisca la resistenza dell'aria, in generale del mezzo,

$$S = -2\delta^* y'$$

Si ha $my'' = -ky - 2\delta^* y'$ e quindi l'equazione del moto, dividendo per m e ponendo $\delta = \frac{\delta^*}{m}$, è

$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0.$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$, il cui $\Delta/4$ è dato da $\Delta/4 = \delta^2 - \omega^2$. Si hanno tre casi.

1^0 CASO: $\delta > \omega$ (cioè $\Delta > 0$) **resistenza elevata**.

$$\lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} = \begin{cases} \lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \\ \\ \lambda_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \end{cases}$$

Le due radici λ_1 e λ_2 sono entrambe negative.
L'equazione del moto é

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Il moto non é oscillatorio, il punto P tende asintoticamente verso il punto 0, origine dell'asse delle y, senza compiere nessuna oscillazione.

Esempio 1. Si consideri l'equazione $y'' + 3y' + y = 0$. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, le cui soluzioni sono: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$. L'integrale generale dell'equazione data è $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$. Se consideriamo le due condizioni iniziali $y(0) = 2,\ y'(0) = 4$, otteniamo l'integrale particolare $y(t) = 8e^{-t} - 6e^{-2t}$ (vedi fig. 4).

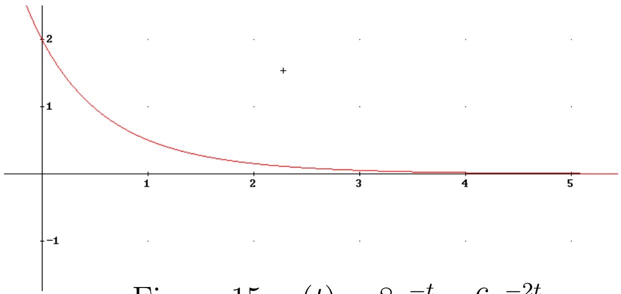


Figure 15: $y(t) = 8e^{-t} - 6e^{-2t}$

2^0 CASO: $\delta = \omega$ (cioè $\Delta = 0$)
Le due radici reali λ_1 e λ_2 sono coincidenti: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$.
L'equazione del moto é

$$y(t) = c_1 e^{-\delta t} + c_2 t e^{-\delta t}.$$

Anche in questo caso il moto non é oscillatorio.

Esempio 2. Si consideri l'equazione $y'' + 2y' + y = 0$. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, che ha come unica soluzione il valore $\lambda_1 = -1$. L'integrale generale dell'equazione data è $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$. Se consideriamo le due condizioni iniziali $y(0) = 2,\ y'(0) = -6$, otteniamo l'integrale particolare $y(t) = 2e^{-t} - 4te^{-t}$.

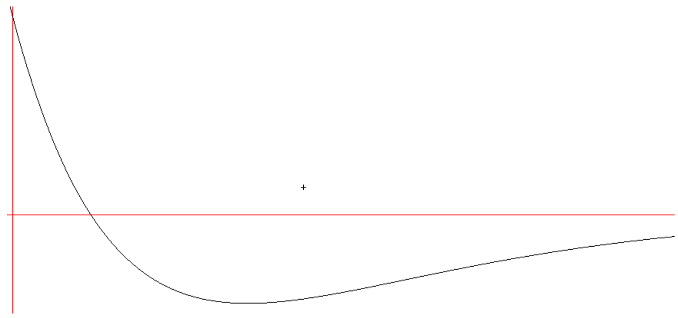


Figure 16: $y(t) = 2e^{-t} - 4te^{-t}$

3^0 CASO: $\delta < \omega$ (cioè $\Delta < 0$) **resistenza debole**.
Le due radici λ_1 e λ_2 sono complesse coniugate.
$\lambda = -\delta \pm i\sqrt{\omega^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\nu$.
L'equazione del moto é

$$y(t) = e^{-\delta t}(c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t).$$

L'ampiezza delle oscillazioni diventa sempre piú piccola (essa viene smorzata al variare del tempo dal termine $e^{-\delta t}$), il punto tende asintoticamente all'origine: **oscillazioni smorzate**.

Esempio 3. Si consideri l'equazione $36y'' + 12y' + 37y = 0$. L'equazione caratteristica associata è $36\lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0$, le cui soluzioni sono: $\lambda_1 = -\frac{1}{6} + i$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{6} - i$. L'integrale generale dell'equazione data è $y(t) = e^{-\frac{t}{6}}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$. Se consideriamo le due condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{5}{6}$, otteniamo l'integrale particolare

$$y(t) = e^{-\frac{t}{6}}(\cos t + \sin t).$$

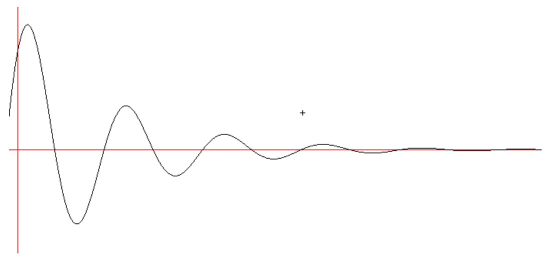


Figure 17: $y(t) = e^{-\frac{t}{6}}(\cos t + \sin t)$.

VIII.3 Vibrazioni forzate e risonanza

Supponiamo ora che sul punto P oltre alla forza elastica ($N = -ky$) e la resistenza del mezzo ($S = -2\delta y'$) agisca, lungo la direzione dell'asse, una forza esterna $F_e = f(t)$. L'equazione del moto diventa

$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = f(t)$$

Consideriamo il caso $\delta = 0$ (cioè la resistenza dell'aria o in generale del mezzo è trascurabile) ed $f(t) = B \sin \gamma t$.
Si trova

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \overline{y}(t)$$

dove

$$\overline{y}(t) = \begin{cases} L\ \sin(\gamma t) + M \cos(\gamma t) & \text{se} \quad \gamma \neq \omega \\ \\ t[L\ \sin(\gamma t) + M \cos(\gamma t)] & \text{se} \quad \gamma = \omega \end{cases}$$

ed L ed M sono appropriate costanti. La funzione $\overline{y}(t)$ genera le oscillazioni forzate. Il fenomeno della risonanza si ha nel caso in cui la forza impressa oscilla con la stessa frequenza caratteristica dell'oscillatore: $\gamma = \omega$
Alle oscillazioni libere si sovrappongono le oscillazioni forzate di uguale pulsazione, ma di ampiezza che viene amplificata con il tempo dal termine t.

Esempio 4. Si consideri l'equazione

$$y'' + \omega^2 y = 3 \sin \gamma t \quad \gamma = 2$$

nei due casi:

- $\omega = 1$, $\gamma \neq \omega$
- $\omega = 2$, $\gamma = \omega$

1^0 **caso:** $\omega = 1$

L'equazione diventa quindi

$$y'' + y = 3 \sin 2t,$$

il cui integrale generale, come è facile verificare, è :

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \sin 2t.$$

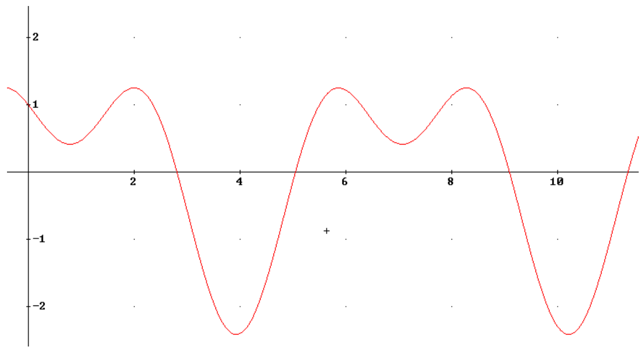


Figure 18: $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \sin 2t$

2^0 **caso:** $\omega = 2$ **Fenomeno della risonanza**
L'equazione diventa quindi

$$y'' + 4y = 3\sin 2t,$$

il cui integrale generale, come è facile verificare, è :
$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - \frac{3}{4} t \cos 2t$

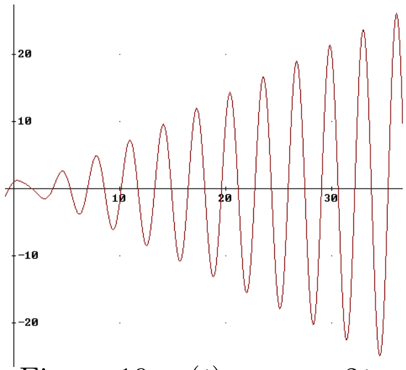


Figure 19: $y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - \frac{3}{4} t \cos 2t$

Analogo al precedente é il caso $\delta = 0$ ed $f(t) = B \cos \gamma t$

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \overline{y}(t)$$

Si trova

$$\overline{y}(t) = \begin{cases} \frac{B}{\omega^2 - \gamma^2} \;\; \cos \gamma t & \text{se} \quad \gamma \neq \omega \\ \\ \frac{B}{2\omega} t \;\; \sin \gamma t & \text{se} \quad \gamma = \omega \end{cases}$$

Esercizi proposti:

1. Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale:

$$y'' + \omega^2 y = A \sin(pt), \; p \in I\!R$$

nei casi:

$$1) \; p \neq \omega \quad 2) \; p = \omega.$$

A quale dei modelli studiati si riferisce l'equazione precedente? In quale caso siamo in presenza del fenomeno della risonanza?

Soluzioni: 1) $y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{A}{\omega^2 - p^2} \sin pt$;
2) $y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{A}{-2\omega} t \cos \omega t$.

2. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y & = & 0 \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 4 \end{cases}$$

A quale dei modelli studiati si riferisce l'equazione $y'' + \omega^2 y = 0$?

Soluzione: $y(t) = \frac{4}{\omega} \sin(\omega t)$

3. Dire quante soluzioni ammette il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y & = & 3t^2 - 2t \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 2 \end{cases}$$

e calcolarle. A quale dei modelli studiati si riferisce l'equazione: $y'' + 2y' + y = 3t^2 - 2t$?

Soluzione: $y(t) = -22e^{-t} - 6te^{-t} + 3t^2 - 14t + 22$.

Domande a risposta multipla

1. La legge $p(t)$ di evoluzione di una popolazione (che si evolve secondo il modello di Verhulst) è data dalla soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} p' &= 5\,p\left(1-\frac{p}{800}\right) \\ p(0) &= 1000 \end{cases}$$

Dopo un periodo di tempo sufficientemente lungo il valore $p(t)$

A divergerà a $+\infty$;

B tenderà a zero;

C decrescerà a 800;

D crescerà a 800;

E decrescerà a 1000;

F nessuna delle precedenti risposte è corretta.

2. Il problema :

$$\begin{cases} y'' - y' + 4y = \sin t \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

A ha come unica soluzione la funzione $y(t) \equiv 0$;

B ha ∞^1 soluzioni;

C ha ∞^2 soluzioni;

D non ammette soluzioni;

E nessuna delle precedenti risposte è corretta.

3. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'y = 1 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

è :

A $y(x) = \sqrt{2x+4}$;

B $y(x) = \sqrt{2x+8}$;

C $y(x) = \sqrt{2x+2}$; ;

D nessuna delle precedenti risposte è corretta.

4. Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 0.025\, y' + 0.4y &= 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

si riferisce al modello matematico che descrive

A le oscillazioni libere senza smorzamento di un oscillatore armonico ad un grado di libertà;

B le oscillazioni forzate con smorzamento di un oscillatore armonico ad un grado di libertà;

C le oscillazioni libere con smorzamento di un oscillatore armonico ad un grado di libertà;

E le oscillazioni forzate senza smorzamento di un oscillatore armonico ad un grado di libertà;

F nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Soluzioni: 1 C; 2 D; 3 B; 4 D; 5 C; 6 D; 7 E; 8 C.