CORSO DI LAUREA IN SPTUPA

Corso di Matematica e Statistica applicata

anno accademico 2013/2014

Secondo l'Eneide, all'origine della fondazione di Cartagine sta la soluzione di un problema di natura matematica. Virgilio racconta che la regina Didone, fuggita da Tiro e sbarcata sulla costa africana, chiede a Iarba, re della regione, un pezzo di terra dove fondare una città. Il re per schernirla le propose tanta terra "...quanta cerchiar di un bue potesse un tergo"; un pezzo di terra grande solo quanto la pelle di un bue. La futura regina di Cartagine seppe risolvere l'inganno a suo favore: dopo avere ricavato dalla pelle delle strisce sottilissime, Didone le usò per delimitare la massima area possibile. La città venne fondata su un appezzamento di terreno semicircolare in riva al mare.

A parità di perimetro, il cerchio è la figura che ha area massima.

1 Esercitazioni di Matematica

1.1 Matrici e sistemi lineari

Esercizio 1 *Date le matrici rettangolari*

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{Vmatrix}$$

calcolare la matrice prodotto $\underline{A} \cdot \underline{B}$, le matrici A^T, B^T. Verificare che vale la regola dell'inversione dell'ordine $(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = \underline{B}^T \cdot \underline{A}^T$.

Esercizio 2 *Calcolare i prodotti $\underline{A} \cdot \underline{B}$ e $\underline{B} \cdot \underline{A}$ delle matrici*

$$\underline{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{Vmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Esercizio 3 *Determinare la caratteristica k della seguente matrice:*

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right\| .$$

Esercizio 4 *Dire se la matrice*

$$\underline{A} = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{array} \right\| .$$

è invertibile. Calcolare, se possibile, la matrice inversa $\underline{A}^{-1}$ e verificare il risultato.

Esercizio 5 *Dire per quali valori del parametro λ la matrice*

$$\underline{A} = \left\| \begin{array}{ccc} 2 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2\lambda & -\lambda & -2 \end{array} \right\| .$$

è invertibile. Calcolare, se possibile, la matrice inversa $\underline{A}^{-1}$ nel caso $\lambda = 1$ e verificare il risultato.

Esercizio 6 *Risolvere con la regola di Cramer (ed anche con il metodo di Gauss) i seguenti sistemi lineari:*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = 1 \\ 2x & + & y & - & z & = 2 \\ x & + & y & - & 2z & = 1 \end{array} \right.$$

[Soluzione: $x = 1$; $y = z = 0$],

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} -x & + & y & + & 2z & = 2 \\ 3x & - & y & + & z & = 6 \\ -x & + & 3y & + & 4z & = 4 \end{array} \right.$$

[Soluzione: $x = 1$; $y = -1$; $z = 2$];

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & = 1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = 0 \end{array} \right.$$

[Soluzione: $x = 13/5$; $y = -3$; $z = -12/5$];

Esercizio 7 *Risolvere il seguente sistema*

$$\begin{cases} x+2y-z-3 & =0 \\ 2x-y+z+1 & =0 \end{cases} .$$

Esercizio 8 *Verificare se il seguente sistema è compatibile e, in caso affermativo, determinare le soluzioni:*

$$\begin{cases} x & - & 2y & - & z & + & t & =0 \\ -x & + & 2y & + & z & + & t & =-1 \\ x & & & + & 3z & + & t & =1 \end{cases}$$

Esercizio 9 *Dopo avere spiegato perchè un sistema omegeneo è sempre compatibile, dire quante soluzioni ammette il seguente sistema e determinarle:*

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & z & - & t & =0 \\ 2x & + & 2y & + & z & + & 4t & =0 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & - & 2t & =0 \end{cases}$$

1.2 Geometria in R^2 ed in R^3

Esercizio 10 *Dati i vettori* $\vec{u}=(4,-3)$ *e* $\vec{v}=(3,0)$ *determinare i versori corrispondenti.*

Esercizio 11 *Dire quando due vettori del piano sono ortogonali. Dire se i due vettori* $\vec{u}=(2,-3)$ *e* $\vec{v}=(3,1)$ *sono ortogonali.*

Esercizio 12 *Determinare un vettore ortogonale al vettore* $\vec{v}=(2,-3)$.

Esercizio 13 *Siano dati i vettori del piano* $\vec{u}=(2,-1)$ *e* $\vec{v}=(3,1)$.
(i) Determinare e rappresentare la somma dei due vettori.
(ii) Calcolare il prodotto scalare dei due vettori.
(iii) Determinare e rappresentare i versori corrispondenti ai due vettori.
(iv) Per ciascuno dei due vettori determinare un vettore ad esso ortogonale.

Esercizio 14 *Ripetere il precedente esercizio con i vettori* $\vec{u}=(1,\sqrt{2})$ *e* $\vec{v}=(2,1)$.

Esercizio 15 *Determinare i versori ortogonali al vettore* $\vec{v}=(-2,1)$.

Esercizio 16 *Determinare le equazioni parametriche della retta* r *passante per* $P = (1, -1)$ *e avente la direzione del vettore* $\vec{u} = (2, -1)$*. Ricavare l'equazione cartesiana della retta. Dire qual è la pendenza della retta* r*.*

Esercizio 17 *Determinare le equazioni parametriche della retta* r *passante per i punti* $P_1 = (1, 2)$ *e* $P_2 = (-1, 3)$*. Scrivere le equazioni parametriche della retta perpendicolare alla retta* r*, prima determinata, e passante per il punto* $P_3 = (2, 3)$*.*

Esercizio 18 *Scrivere le equazioni della retta* r *passante per i punti* $P_1 = (1, 3, -1)$*, e* $P_2 = (-1, 3, 0)$*.*

Esercizio 19 *Scrivere l'equazione del piano passante per il punto* $P = (2, -1, 1)$ *e ortogonale al vettore* $\vec{n} = (2, 4, -1)$*.*

Esercizio 20 *Scrivere le equazioni parametriche della retta di* $\mathbb{R}^3$ *ottenuta come intersezione dei piani* $x - 2y + 7z = 2$ *e* $2x - 4y - 6z = 3$*.*

Esercizio 21 *Rappresentare come intersezione di due piani di* $\mathbb{R}^3$ *la retta di equazioni parametriche:*

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1.3 Luoghi geometrici

Esercizio 22 *Scrivere l'equazione della circonferenza di centro* $C(-2, 0)$ *e raggio* 5*. Tracciare il suo grafico.*

Esercizio 23 *Determinare il centro ed il raggio della circonferenza avente equazione:*

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4.$$

Esercizio 24 *Tracciare il grafico della funzione* $y = \sqrt{9 - x^2}$*.*

Esercizio 25 *Riconoscere e rappresentare graficamente le curve rappresentate dalle seguenti equazioni:*

i) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$;	*ii)* $\dfrac{x^2}{9} - y^2 = 1$;
iii) $\dfrac{x^2}{9} - y^2 = -1$;	*iv)* $x^2 + y^2 = 4$;
v) $\dfrac{x^2}{9} - 2y^2 = 1$	*vi)* $9x^2 + 16y^2 = 144.$

1.4 Funzioni elementari

Esercizio 26 *Tracciare i grafici di* $f(x) = x^3$ *ed* $f(x) = x^4$.

Esercizio 27 *Tracciare i grafici di* $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *ed* $f(x) = \sqrt[4]{x}$*, specificando il campo di esistenza di ciascuna funzione.*

Esercizio 28 *Tracciare i grafici di* $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ *ed* $f(x) = \lg_{\frac{1}{2}} x$.

Esercizio 29 *Tracciare i grafici di* $f(x) = \sin x$*,* $f(x) = \cos x$ *e*
$f(x) = \tan x$*, specificando il campo di esistenza ed il periodo di ciascuna funzione.*

Esercizio 30 *Tracciare il grafico della funzione* $f(x) = \cos x$ *per* $x \in [0, \pi]$*. Tracciare il grafico della funzione* $f(x) = \arccos x$.

Esercizio 31 *Tracciare il grafico della funzione* $f(x) = \sin x$ *per* $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*. Tracciare il grafico della funzione* $f(x) = \arcsin x$.

Esercizio 32 *Tracciare il grafico della funzione* $f(x) = \tan x$ *per* $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$*. Tracciare il grafico della funzione* $f(x) = \arctan x$.

Formule di addizione e sottrazione del seno e del coseno.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

Formule di duplicazione.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

1.5 Funzioni composte

Esercizio 33 *Determinare l'espressione delle funzioni composte $f \circ g$ nei seguenti casi:*

$$
\begin{array}{ll}
i) & f(x) = x^3 \quad e \quad g(x) = \dfrac{x+1}{x} \ ; \\[2ex]
ii) & f(x) = \sqrt{x} \quad e \quad g(x) = x^2 + 1 \ ; \\[2ex]
iii) & f(x) = \log x \quad e \quad g(x) = x^2 - 3 \ ; \\[2ex]
iv) & f(x) = \sin x \quad e \quad g(x) = x^2 \ ; \\[2ex]
v) & f(x) = x^2 \quad e \quad g(x) = \sin x \ ; \\[2ex]
vi) & f(x) = e^x \quad e \quad g(x) = \sqrt{x}.
\end{array}
$$

1.6 Limiti

Esercizio 34 *Dedurre il valore dei seguenti limiti dal grafico delle rispettive funzioni:*

(i) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}$

(ii) $\lim_{x\to+\infty} 3^x$

(iii) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$

(iv) $\lim_{x\to 0^+} \ln x$

(v) $\lim_{x\to+\infty} \ln x$

(vi) $\lim_{x\to+\infty} \arctan x$

(vii) $\lim_{x\to-\infty} x^3$

(viii) $\lim_{x\to+\infty} x^3$

(ix) $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}$

(x) $\lim_{x\to 0^+} \ln x$

(xi) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}.$

Esercizio 35 *Calcolare il valore dei seguenti limiti:*

$$i) \quad \lim_{x\to-\infty} x^3 - 4x + 4 \ ;$$

$$ii) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2}{3-x^3} \ ;$$

$$iii) \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+1}{2x^2+7} \ ;$$

$$iv) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{x} \ ;$$

$$v) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^6}{1-x^4} \ ;$$

$$vi) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^6}{x^4+1} \ ;$$

$$vii) \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{1-x-2x^3} \ ;$$

$$viii) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x^4+1}$$

Esercizio 36 *Calcolare il valore dei seguenti limiti:*

$$i) \quad \lim_{x\to-1^-} \frac{x^3}{x^2-1} \ ;$$

$$ii) \quad \lim_{x\to0^+} \frac{x-2}{x} \ ;$$

$$iii) \quad \lim_{x\to0^-} \frac{x-2}{x}$$

$$iv) \quad \lim_{x\to1^+} \frac{x+1}{x^2-x} \ ;$$

$$v) \quad \lim_{x\to1^-} \frac{x+1}{x^2-x} \ ;$$

$$vi) \quad \lim_{x\to-1^+} \frac{x^3}{x^2-1} \ .$$

Esercizio 37 *Tracciare il grafico della funzione* $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. *Dire quanto vale il*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Esercizio 38 *Calcolare il valore dei seguenti limiti:*

$$i) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} \ ;$$

$$ii) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} \ .$$

1.7 Funzioni continue

Esercizio 39 *Dire quando una funzione è continua in un punto (e quando è continua in un intervallo).*

Esercizio 40 *Tracciare il grafico della funzione* $f(x) = |x|$, *e dire se è continua in* $x_0 = 0$.

Esercizio 41 *Tracciare il grafico della funzione parte intera di* x, $f(x) = [x]$, *e dire in quali punti non è continua, precisando il tipo di discontinuità.*

Esercizio 42 *Enunciare il Teorema di Weierstrass.*

Esercizio 43 *Tracciare il grafico di una funzione continua in* $(0, 1]$ *che ha massimo* $M = 4$, *assunto nel punto* $x = 1/2$, *e non ha minimo.*

1.8 Derivate

Esercizio 44 *Scrivere il rapporto incrementale di* $f(x) = \sin x$ *nel punto* $x_0 = \pi$.

Tabella delle derivate delle principali funzioni elementari

$f(x)$	$f'(x)$
x^b	bx^{b-1}
$\log x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{cos^2 x}$

Esercizio 45 *Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:*

(i) $f(x) = \sqrt{x}$;

(ii) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

(iii) $f(x) = \tan x$.

Operazioni sulle derivate

Se f *e* g *sono due funzioni derivabili, valgono le seguenti regole di calcolo, rispettivamente, per la somma, il prodotto ed il quoziente:*

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \qquad se \quad g \neq 0$

Esercizio 46 *Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:*

(i) $f(x) = x^4 + 2x - \sin x$;

(ii) $f(x) = xe^x + \cos x$;

(iii) $f(x) = \sin x \cos x$;

(iv) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 2x + 3}$;

(v) $f(x) = \dfrac{sinx}{x}$;

(vi) $f(x) = \sin^2 x$;

(vii) $f(x) = x \ln x$.

Esercizio 47 *Dire come si calcola la derivata della funzione composta $f(g(x))$.*

Tabella delle derivate di alcune funzioni composte

$f(x)$	$f'(x)$
$[f(x)]^b$	$b[f(x)]^{b-1} \cdot f'(x)$
$\log f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$\sin f(x)$	$f'(x) \cdot \cos f(x)$
$\cos f(x)$	$-f'(x) \cdot \sin f(x)$
$\tan f(x)$	$\frac{f'(x)}{cos^2 f(x)}$

Esercizio 48 *Calcolare la derivata delle seguenti funzioni composte:*

(i) $f(x) = \ln(x^3 + 3x)$;

(ii) $f(x) = 4\sqrt{2x - x^3}$;

(iii) $f(x) = \sin(3x^2 + 1)$;

(iv) $f(x) = \ln(x^3 + 3x)$;

(v) $f(x) = \cos\sqrt{x+1}$.

(vi) $f(x) = e^{x^2-x}$.

Significato della geometrico derivata. Retta tangente al grafico di una funzione.

Esercizio 49 *Spiegare il significato geometrico del rapporto incrementale di una funzione, ed il significato geometrico della derivata.*

Esercizio 50 *Determinare i punti della curva* $y = x^3 - 3x$ *in cui la retta tangente è parallela all'asse delle* x*.*

Esercizio 51 *Determinare i punti della curva* $y = x^3 + 3x^2$ *in cui la retta tangente è parallela all'asse delle* x*.*

Esercizio 52 *Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $y = \ln x$ *nei punti di ascissa* $x = e$ *e* $x = e^2$*.*

Esercizio 53 *Determinare il punto della curva* $y = x^2 - 1$ *in cui la retta tangente ha pendenza* -3*.*

Esercizio 54 *Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x)$ *nel punto* x_0 *indicato*

i) $f(x) = \ln x$ $\quad x_0 = 1$;

ii) $f(x) = \sin x$ $\quad x_0 = 0$;

iii) $f(x) = e^{4x+1}$ $\quad x_0 = 0$;

iv) $f(x) = \sqrt{3x^2 + x + 4}$ $\quad x_0 = 0$;

v) $f(x) = \ln x$ $\quad x_0 = e$;

vi) $f(x) = \ln x$ $\quad x_0 = e^2$;

Studio della derivata prima. Criterio di monotonia. Massimi e minimi.

Esercizio 55 *Determinare gli intervalli di crescenza e di decrescenza della funzione*

$$f(x) = x^3 - 4x.$$

Esercizio 56 *Determinare gli intervalli di crescenza e di decrescenza della funzione*

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

Esercizio 57 *Calcolare il massimo ed il minimo globali della funzione*

$$f(x) = x^2 - x + 1$$

nell'intervallo $[-4, 4]$. *Giustificare l'esistenza, in questo caso, del massimo ed il minimo globali.*

Esercizio 58 *Tra tutti i rettangoli di area fissata, determinare quello di perimetro minore.* [Suggerimento: Si denoti con a, x e $\frac{a}{x}$, rispettivamente l'area, la misura della base e quella dell'altezza del rettangolo. Occorre determinare il minimo della funzione $f(x) = 2x + 2\frac{a}{x}$, $x > 0$].

Esercizio 59 *Una finestra normanna ha la forma di un rettangolo sormontato da un semicerchio. Se il perimetro della finestra deve essere di* $10m$, *calcolare le misure della finestra in modo che entri la maggiore quantità possibile di luce.*

Studio di funzione.

$$(1) \quad f(x) = \sin^2 x$$

$$(2) \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$(3) \quad f(x) = e^{-x^2}$$

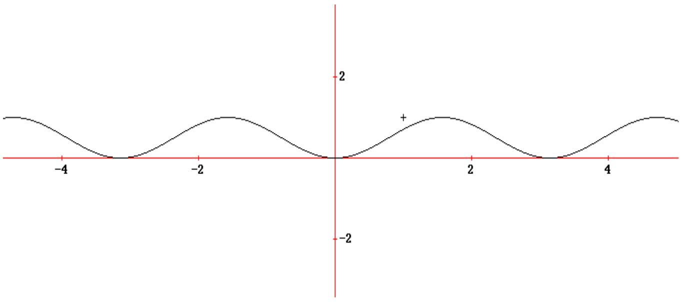

Figure 1: $f(x) = \sin^2 x$

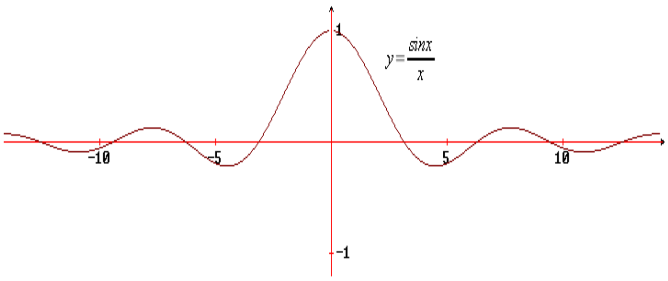

Figure 2: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

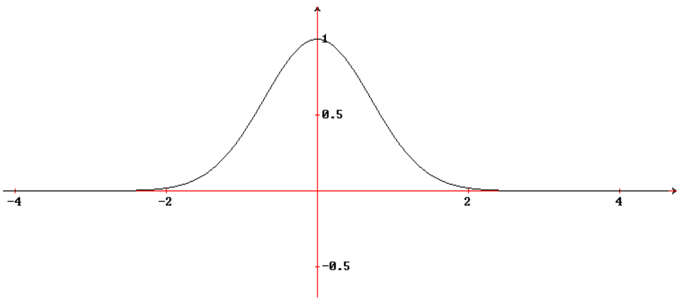

Figure 3: $f(x) = e^{-x^2}$

Esercizio 60 *Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado, fornendo una interpretazione mediante il grafico della parabola:*

$$i)\quad x^2 - 5x + 4 > 0 \ ;$$

$$ii)\quad x^2 + x + 1 < 0 \ ;$$

$$iii)\quad x^2 - 5 > 0 \ ;$$

$$iv)\quad x^2 + 1 > 0 \ ;$$

$$v)\quad -x^2 - 2x + 3 \geq 0.$$

Esercizio 61 *Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare l'insieme di definizione, il segno, gli eventuali asintoti, gli intervalli di crescenza e quelli di decrescenza, gli eventuali punti di massimo e quelli di minimo relativo e tracciare alla fine un grafico qualitativo:*

$$i)\quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \ ;$$

$$ii)\quad f(x) = x^3 - 4x \ ;$$

$$iii)\quad f(x) = x^4 + 6x^2 - 7$$

$$iv)\quad f(x) = \cos^2 x \ ;$$

$$v)\quad f(x) = \frac{x}{3x^2 - 1} \ ;$$

$$vi)\quad f(x) = \frac{x}{x^2 + 9};$$

$$vii)\quad f(x) = \frac{1 + x^2}{2 - x^2} \ ;$$

$$viii)\quad f(x) = \sqrt{x^2 - 2} \ ;$$

$$ix)\quad f(x) = xe^x \ ;$$

$$x)\quad f(x) = x^2 e^x \ ;$$

$$xi)\quad f(x) = x \ln x.$$

1.9 Integrali indefiniti

Sia I un intervallo ed $f : I \to R$ una funzione. Una funzione $F(x)$ definita e derivabile in I si dice *primitiva* di $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$. Poiché due primitive di una stessa funzione differiscono per una costante, la famiglia delle primitive di una funzione $f(x)$ formato da funzioni del tipo $F(x)+c$, essendo $F(x)$ una qualsiasi primitiva di $f(x)$ e c una costante. L'*integrale indefinito* di una funzione $f(x)$ si indica con il simbolo $\int f(x)dx$ ed la famiglia delle primitive di $f(x)$. Si ha quindi

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Integrali immediati di alcune funzioni elementari

$$\int x^\alpha \ dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad per \ \ \alpha \neq -1 \ \ ed \ \ x > 0 \ \ se \ \ \alpha \ \ non \ \ intero$$

$$\int \frac{1}{x} \ dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x \ dx = e^x + c$$

$$\int \sin x \ dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \ dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \ dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ dx = \arcsin x + c = -\arccos x + k$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \ dx = \arctan x + c.$$

L'integrale indefinito è lineare, cioè *si ha*

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] \ dx = \alpha \int f(x) \ dx + \beta \int g(x) \ dx. \tag{1}$$

Esercizio 62 *Calcolare i seguenti integrali indefiniti:*

$$
\begin{array}{llll}
i) & \displaystyle\int x^3 dx; & ii) & \displaystyle\int x^6\, dx; \\[2ex]
iii) & \displaystyle\int \frac{1}{x^2}\, dx; & iv) & \displaystyle\int (x^2-1)^2\, dx; \\[2ex]
v) & \displaystyle\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\, dx; & vi) & \displaystyle\int \left(x^2-\frac{5}{x^2}\right)\, dx; \\[2ex]
vii) & \displaystyle\int \cos x\, dx; & viii) & \displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx \\[2ex]
ix) & \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\, dx; & x) & \displaystyle\int \frac{x}{x+1}\, dx.
\end{array}
$$

Per gli esercizi (iv), (v), (vi) e (x) si usa il **metodo di integrazione per decomposizione in somma** *che si basa sulla formula (1). La decomposizione negli esercizi (iv), (v), (vi) è immediata.*

$$\left[\textbf{Soluzione:}\ x)\ \int \frac{x}{x+1}\, dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}\, dx = \int \left(1-\frac{1}{x+1}\right)\, dx = x+\ln|x+1|+c.\right]$$

Esercizio 63 *Calcolare per decomposizione in somma i seguenti integrali indefiniti*

$$i)\ \int \frac{x-13}{\sqrt{x}}\, dx; \qquad ii)\ \int \frac{3x^2-x+12}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Soluzioni: *i)* $2/3\sqrt{x^3}-26\sqrt{x}+c$; *ii)* $6/5\sqrt{x^5}-2/3\sqrt{x^3}+24\sqrt{x}+c$.

Integrali quasi immediati

$$\int (f(x))^{\alpha} f'(x)\ dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \textit{per} \ \ \alpha \neq -1;$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int e^{f(x)}\ f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int \sin f(x) \cdot f'(x) dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int \cos f(x) \cdot f'(x) dx = \sin f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\ dx = \tan f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}\ dx = \arcsin f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}\ dx = \arctan f(x) + c.$$

Esercizio 64 *Calcolare i seguenti integrali indefiniti (quasi immediati):*

$$i) \quad \int x^2 e^{x^3}\ dx; \qquad ii) \quad \int x\ \sin x^2\ dx;$$

$$iii) \quad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx; \qquad iv) \quad \int \frac{x^3}{1+x^4}\ dx;$$

$$v) \quad \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\ dx; \qquad vi) \quad \int \sin 7x\ dx;$$

$$vii) \quad \int \tan x\ dx; \qquad viii) \quad \int e^{2x}\ dx.$$

Soluzioni: *i)* $1/3 e^{x^3} + c$; *ii)* $-1/2 \cos x^2 + c$; *iii)* $2e^{\sqrt{x}} + c$; *iv)* $1/4 \ln(1+x^4) + c$; *v)* $-\arctan \cos x + c$; *vi)* $-1/7 \cos(7x) + c$; *vii)* $-\log|\cos x| + c$; *viii)* $1/2 e^{2x}$.

Una volta **riconosciuti** gli integrali quasi immediati, se si vuole, si possono calcolare con il **metodo di integrazione per sostituzione** ponendo $f(x) = t$. Esempio: $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\ dx$.
Poniamo $x^3 = t$, differenziando ambo i membri otteniamo $3x^2 dx = dt$,
così $x^2 dx = \frac{1}{3} dt$. Sostituendo si trova
$\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\ dx = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + c = \frac{1}{3}e^{x^3} + c$

Esercizio 65 *Calcolare i seguenti integrali indefiniti (quasi immediati):*

$$
\begin{array}{llll}
i) & \displaystyle\int \frac{1}{2-7x}\ dx; & ii) & \displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx; \\[2ex]
iii) & \displaystyle\int e^{-x}\ dx; & iv) & \displaystyle\int \sin x \cos x\ dx; \\[2ex]
iv) & \displaystyle\int \sin^2 x \cos x\ dx; & vi) & \displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\ dx.
\end{array}
$$

Soluzioni: *i)* $-1/7 \ln|2-7x| + c$; *ii)* $-2\cos\sqrt{x} + c$ . . . . .

Esercizio 66 *Usando le formule di bisezione*

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad e \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

verificare le seguenti formule:

$$\int \sin^2 x\ dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + c$$
$$\int \cos^2 x\ dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + c$$

(NB: I due integrali precedenti si possono calcolare anche integrando per parti).

Metodo di integrazione per parti

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Esercizio 67 *Calcolare per parti i seguenti integrali indefiniti*

$$
\begin{array}{llll}
i) & \displaystyle\int x\cos x\ dx; & ii) & \displaystyle\int x\sin x\ dx; \\
iii) & \displaystyle\int xe^x\ dx; & iv) & \displaystyle\int x^2e^x\ dx \quad \text{si integra due volte per parti;} \\
v) & \displaystyle\int \ln x\ dx; & vi) & \displaystyle\int x\ln x\ dx; \\
vii) & \displaystyle\int x^2\ln x\ dx; & viii) & \displaystyle\int x^5\ln x\ dx.
\end{array}
$$

Soluzioni: *i)* $x\sin x + \cos x + c$; *ii)* $-x\cos x + \sin x + c$; *iii)*$xe^x - e^x + c$; *iv)* $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$; *v)* $x\ln x - x + c$; *vi)* $x^2/2\ln x - 1/4x^2 + c$; *vii)* $x^/3\ln x - 1/9x^3 + c$; *viii)* $1/6x^6\ln x - 1/36x^6 + c$.

Esercizio 68 *Calcolare per parti i seguenti integrali indefiniti*

$$
\begin{array}{llll}
i) & \displaystyle\int (x+3)e^x dx; & ii) & \displaystyle\int xe^{-x}\ dx; \\
iii) & \displaystyle\int \sin^2 x\ dx; & iv) & \displaystyle\int cos^2 x\ dx;
\end{array}
$$

1.10 Integrali definiti

Formula fondamentale del calcolo integrale

$$\int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Esercizio 69 *Calcolare*

$$\int_0^4 \sqrt{x}\ dx,$$

corrispondente all'area del trapezoide individuato sull'intervallo $[0,4]$ *dalla funzione* $f(x) = \sqrt{x}$.

Esercizio 70 *Calcolare l'area del trapezoide individuato sull'intervallo* $[0,5]$ *dalla funzione*

$$f(x) = 3x^2 + 2.$$

Esercizio 71 *Calcolare*

$$\int_0^\pi (x - \sin x)\ dx,$$

corrispondente all'area della superficie piana racchiusa fra i grafici delle funzioni $f(x) = x$ *e* $g(x) = \sin x$ *per* $x \in [0, \pi]$.

Esercizio 72 *Calcolare*

$$\int_1^e x \ln x\ dx.$$

Esercizio 73 *Rappresentare il grafico della funzione* $f(x) = \sin x$ *e calcolare*

$$\int_0^\pi \sin x\ dx.$$

Esercizio 74 *Rappresentare il grafico della funzione* $f(x) = \sin^2 x$ *e calcolare*

$$\int_0^\pi \sin^2 x\ dx.$$

Esercizio 75 *Calcolare*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\ dx.$$

1.11 APPUNTI DI MATEMATICA
Funzione reale di due variabili reali.

Il concetto di funzione reale di una variabile si estende facilmente al concetto di funzione reale di due variabili.

Definizione (di funzione reale di due variabili reali) Una *funzione reale di due variabili reali* è una corrispondenza che ad ogni coppia (x, y) di un sottoinsieme A di R^2 associa un ben determinato numero reale $f(x, y)$. In simboli:

$$(x, y) \to f(x, y).$$

Per denotare una funzione si scriverà indifferentemente o $f(x, y)$ oppure $z = f(x, y)$.
Nello spazio l'insieme dei punti

$$(x, y, f(x, y))$$

con $(x, y) \in A$, rappresenta una superficie, detta *grafico* della funzione $f(x, y)$.
Ad esempio, la funzione $f(x, y) = ax + by + c$ (o equivalentemente $z = ax + by + c$), dove a, b, c sono costanti reali ha come superficie grafico un piano.
La funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

(o equivalentemente $z = x^2 + y^2$) ha come superficie grafico un paraboloide ellittico con vertice nell'origine delle coordinate.

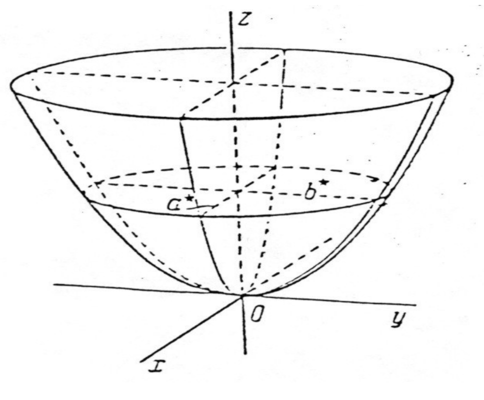

Figure 4: Paraboloide ellittico.

La funzione

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

(o equivalentemente $z = x^2 - y^2$) ha come superficie grafico un paraboloide a sella, con l'origine come punto di sella.

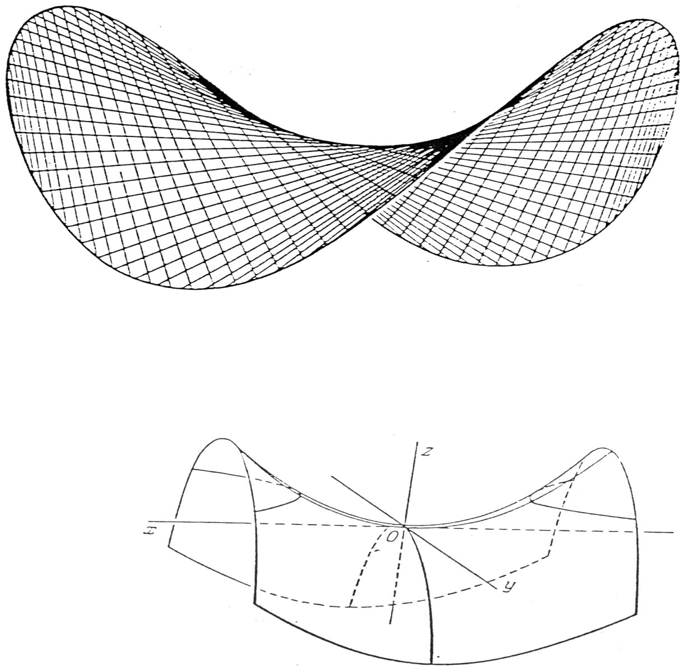

Figure 5: Paraboloide iperbolico.

Il grafico di una funzione dà una rappresentazione tridimensionale della funzione stessa. E' possibile rappresentare bidimensionalmente una funzione mediante le curve di livello. Le *curve di livello* sono quelle curve del piano in cui la funzione $f(x,y)$ assume un valore costante.

Ad esempio, le curve di livello della funzione $f(x,y) = x^2+y^2$ sono circonferenze aventi il centro nell'origine delle coordinate; mentre le curve di livello della funzione $f(x,y) = x^2-y^2$ sono iperboli con centro nell'origine delle coordinate.

Derivate parziali prime e seconde.

I concetti di continuità e derivabilità si estendono alle funzioni di due variabili. Nel caso in cui esistano, si possono considerare per una funzione di due variabili $f(x, y)$ definita in un insieme aperto $A \subseteq R^2$

- la *derivata parziale prima rispetto alla variabile* x che denotiamo con uno dei simboli

$$f_x(x, y) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} \qquad D_x f$$

- la *derivata parziale prima rispetto alla variabile* y che denotiamo con uno dei simboli

$$f_y(x, y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \qquad D_y f.$$

Regola pratica per calcolare le derivate parziali prime.

La derivata parziale prima $f_x(x, y)$ rispetto ad x si calcola considerando la funzione $f(x, y)$ come funzione della sola variabile x, mentre la variabile y deve essere considerata come una costante. Quindi si potranno applicare tutte le regole viste per il calcolo delle derivate delle funzioni di una variabile considerando la funzione $f(x, y)$ come funzione della variabile x e considerando la variabile y costante.

La derivata parziale prima $f_y(x, y)$ rispetto ad y si calcola considerando la funzione $f(x, y)$ come funzione della sola variabile y, mentre la variabile x deve essere considerata come una costante. Quindi si potranno applicare tutte le regole viste per il calcolo delle derivate delle funzioni di una variabile considerando la funzione $f(x, y)$ come funzione della variabile y e considerando la variabile x costante.

Definizione (di gradiente) Data una funzione di due variabili $f(x, y)$ definita in un insieme $A \subseteq R^2$ si dice *gradiente* di $f(x, y)$ il vettore che ha per componenti le derivate parziali prime. Il gradiente si indica con il simbolo $\mathrm{grad} f(x, y)$, si ha quindi

$$\mathrm{grad} f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)).$$

Supponiamo che una funzione di due variabili $f(x, y)$ ammetta derivate parziali $f_x(x, y)$ ed $f_y(x, y)$ in tutto un insieme aperto A. Possiamo allora chiederci se, a loro volta, le funzioni $f_x(x, y)$ ed $f_y(x, y)$ siano derivabili nei punti di tale insieme. In caso affermativo avremo *le derivate parziali seconde* della funzione di due variabili che saranno ovviamente quattro:

$$f_{xx}(x, y) \qquad f_{xy}(x, y) \qquad f_{yx}(x, y) \qquad f_{yy}(x, y)$$

che sono rispettivamente la derivata parziale seconda della f calcolata rispetto ad x due volte, la derivata parziale seconda della f calcolata prima rispetto ad x e poi rispetto ad y, la derivata parziale seconda della f calcolata prima rispetto ad y e poi rispetto ad x ed infine la derivata parziale seconda della f calcolata rispetto ad y due volte.

Le derivate f_{xy} ed f_{yx} prendono il nome *derivate seconde miste*. E' importante osservare (Teorema di Schwarz) che le derivate seconde miste coincidono nei punti in cui sono continue.

Massimi e minimi relativi ed assoluti di funzioni di due variabili

Definizione (minimo e massimo relativo di una funzione di due variabili) Data una funzione di due variabili $f(x,y)$ definita in un insieme $A \subseteq R^2$, un punto $(x_0, y_0) \in A$ si dice

- *punto di minimo relativo* per $f(x,y)$ se esiste un intorno di (x_0, y_0) tale che <u>per ogni punto (x,y) di A appartenente a tale intorno</u> si verifica che

$$f(x_0, y_0) \leq f(x,y).$$

- *punto di massimo relativo* per $f(x,y)$ se esiste un intorno di (x_0, y_0) tale che <u>per ogni punto (x,y) di A appartenente a tale intorno</u> si verifica che

$$f(x_0, y_0) \geq f(x,y).$$

Definizione (minimo e massimo assoluto di una funzione di due variabili) Data una funzione di due variabili $f(x,y)$ definita in un insieme $A \subseteq R^2$, un punto $(x_0, y_0) \in A$ si dice

- *punto di minimo assoluto* per $f(x,y)$ se <u>$\forall\ (x,y) \in A$</u> si verifica che

$$f(x_0, y_0) \leq f(x,y).$$

- *punto di massimo assoluto* per $f(x,y)$ se <u>$\forall\ (x,y) \in A$</u> si verifica che

$$f(x_0, y_0) \geq f(x,y).$$

Il numero reale $f(x_0, y_0)$ prende il nome, a seconda dei casi, di *massimo* o *minimo relativo* o *assoluto*. Circa l'esistenza dei massimi e minimi assoluti per una funzione di due variabili vale il seguente:

Teorema (di Weierstrass) *Una funzione di due variabili $f(x, y)$ definita e continua in un insieme chiuso e limitato $K \subseteq R^2$ è dotata di minimo e di massimo assoluto.*

Ricerca dei massimi e dei minimi relativi (liberi) di funzioni di due variabili.

Per la ricerca dei massimi e dei minimi relativi di una funzione di due variabili dobbiamo fare riferimento al seguente teorema.

Teorema *Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili definita in un insieme $A \subseteq R^2$. Sia (x_0, y_0) un punto interno ad A di massimo o di minimo relativo per f e supponiamo che f ammetta derivate parziali prime in tale punto. Allora*

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 0.$$

I punti (x_0, y_0) in cui si verificano queste condizioni prendono il nome di punti critici.

Osserviamo che il Teorema precedente fornisce solamente delle condizioni necessarie ma non sufficienti alla ricerca dei massimi e dei minimi relativi per le funzioni di due variabili. In altre parole potrebbero esistere dei punti (x_0, y_0) in cui $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$ senza però che tali punti siano di massimo o di minimo relativo.

In altre parole potrebbero esistere dei punti (x_0, y_0) in cui $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, senza però che tali punti siano di massimo o di minimo relativo. Ad esempio, il punto $(0, 0)$ è un punto critico per la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$, ma non è né un punto di massimo, né un punto di minimo, come si vede osservando la superficie grafico.

Dobbiamo allora introdurre delle ulteriori condizioni che ci permettono di definire la natura del punto critico. Per fare ciò dobbiamo prima di tutto dare la seguente definizione.

Definizione (di matrice hessiana) Data una funzione di due variabili $f(x, y)$ definita in un insieme $A \subseteq R^2$, continua con le derivate prime e seconde, prende il nome di *matrice hessiana* la seguente matrice simmetrica:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

Possiamo allora enunciare il seguente:

Teorema (della ricerca dei massimi e minimi) *Sia $f(x,y)$ una funzione di due variabili definita in un insieme $A \subseteq R^2$, continua con le derivate prime e seconde e sia (x_0,y_0) un punto critico interno ad A. In base al valore del determinante $|H(x_0,y_0)|$ si hanno i seguenti casi:*

- *$|H(x_0,y_0)| > 0$ e $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$, allora (x_0,y_0) è un punto di minimo relativo*
- *$|H(x_0,y_0)| > 0$ e $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, allora (x_0,y_0) è un punto di massimo relativo*
- *$|H(x_0,y_0)| < 0$, allora (x_0,y_0) non è un punto di massimo nè un punto di minimo relativo e prende il nome di punto di sella*
- *$|H(x_0,y_0)| = 0$, niente può essere detto a priori su (x_0,y_0)*

Esempio. Si studino i massimi ed i minimi relativi (liberi) della funzione

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2.$$

Sappiamo che condizione necessaria affinchè un punto (x_0,y_0) sia di massimo o di minimo relativo è che in esso si annullino le derivate parziali prime della funzione. Calcoliamo allora le due derivate parziali prime. Derivando la funzione rispetto ad x e ad y si ottiene, rispettivamente: $f_x(x,y) = 6x^2 - 6y$ e $f_y(x,y) = -6x + 6y$.

Risolvendo ora il seguente sistema:

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$$

si trova che i punti critici della funzione sono $(0,0)$ e $(1,1)$.

Per classificare i punti critici occorre calcolare le derivate parziali seconde:

$$f_{xx}(x,y) = 12x \quad f_{xy}(x,y) = -6 \quad f_{yy}(x,y) = 6.$$

Quindi la matrice Hessiana della funzione è così definita:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

Nel punto $(0,0)$ risulta $|H(0,0)| = -36 < 0$ per cui il punto $(0,0)$ è un punto di sella.

Nel punto $(1,1)$ risulta $|H(1,1)| = 36 > 0$ ed $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$ per cui il punto $(1,1)$ è un punto di minimo relativo.

Massimi e minimi vincolati di funzioni di due variabili

In molte applicazioni sorge la necessità di calcolare i massimi e i minimi di funzioni di due variabili le cui variabili non sono indipendenti ma devono soddisfare alla condizione

$$g(x, y) = 0.$$

La funzione $g(x, y)$ è detta *funzione di vincolo* .
Si parla allora di *ricerca di massimi e minimi vincolati* per funzioni di due variabili.
Per trovare i massimi ed i minimi vincolati si può procedere in due modi:

(a) esplicitando una delle due variabili dal vincolo e sostituendola nella funzione; si deve studiare così una funzione in una variabile;

(b) applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

(a) Il primo metodo, di sostituzione diretta, si usa quando il vincolo si può scrivere come $y = \phi(x)$. Allora sostituendo y nell' espressione della funzione si ottiene una funzione di una sola variabile: $h(x) = f(x, \phi(x))$. Si procede quindi studiando i massimi ed i minimi della funzione $h(x)$.

Esempio (a). Data la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ si determini, mediante sostituzione, il minimo della funzione $f(x, y)$ soggetto al vincolo $y = \frac{5}{4} - \frac{3}{4}x$.

Procediamo dapprima per sostituzione. Sostituendo $y = \frac{5}{4} - \frac{3}{4}x$ nell' espressione della funzione si ottiene la funzione di una variabile:

$$h(x) = x^2 + (\frac{5}{4} - \frac{3}{4}x)^2.$$

Quindi dobbiamo studiare i massimi ed i minimi della funzione

$$h(x) = \frac{25}{16}x^2 - \frac{15}{8}x + \frac{25}{16}.$$

Calcolando la derivata prima di $h(x)$ abbiamo

$$h'(x) = \frac{25}{8}x - \frac{15}{8}.$$

La derivata prima $h'(x)$ si annulla nel punto $x = \frac{3}{5}$ che risulata un punto di minimo.
Il minimo della funzione è il valore di $h(\frac{3}{5})$, che è 1. Concludiamo che il minimo della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ soggetto al vincolo $y = \frac{5}{4} - \frac{3}{4}x$ è 1.

(b) Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si usa, preferibilmente, quando il vincolo $g(x,y)$ rappresenta una curva chiusa e limitata (per esempio: circonferenza ed ellisse). Introduciamo la seguente:

Definizione (di funzione Lagrangiana) Data una funzione di due variabili $f(x,y)$ definita in un insieme $A \subseteq R^2$ e la funzione vincolo $g(x,y)$ prende il nome di *funzione Lagrangiana* la seguente funzione a tre variabili:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

con $\lambda \in R$.

Quindi faremo riferimento al seguente teorema.

Teorema *Sia $f(x,y)$ una funzione di due variabili definita in un insieme $A \subseteq R^2$ continua con le derivate prime. I punti di massimo e minimo vincolato (x_0,y_0) di f con vincolo $g(x,y) = 0$, dove $g(x,y)$ è continua con le derivate prime e $gradf(x_0,y_0) \neq (0,0)$, sono punti critici liberi per la funzione Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda)$. Quindi se (x_0,y_0) è un punto di A appartenente al vincolo di massimo o di minimo relativo per f sul vincolo, allora (x_0,y_0) deve essere soluzione del seguente sistema:*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \quad (\textit{cioè } g(x,y) = 0). \end{cases}$$

I punti (x_0,y_0) in cui si verificano queste condizioni prendono il nome di punti critici vincolati.

Una volta determinati i punti critici vincolati si calcolano i valori che la funzione assume in tali punti e dal loro confronto si stabilisce qual è il massimo e qual è il minimo della funzione.

Esempio (b). Data la funzione $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 1$ si determinino mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange il massimo ed il minimo della funzione $f(x,y)$ sul vincolo $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
Scriviamo la funzione Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ricordiamo che i punti di massimo e di minimo vanno quindi ricercati nell'insieme dei punti che sono soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \quad (\text{cioè } g(x,y) = 0) \end{cases}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 4y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si individuano i seguenti quattro punti:

$$(0,1) \quad (0,-1) \quad (-1,0) \quad (1,0).$$

Per decidere qual è il massimo e qual è il minimo della funzione dobbiamo calcolare il valore della funzione in questi punti. Risulta:
$f(0,1) = 3$
$f(0,-1) = 3$
$f(-1,0) = 2$
$f(1,0) = 2$
e quindi possiamo concludere che il minimo della funzione è 2 e ci sono due punti nei quali la funzione assume valore minimo, rispettivamente i punti $(-1,0)$ e $(1,0)$; il valore massimo della funzione è 3 e ci sono due punti nei quali la funzione assume valore massimo, rispettivamente i punti $(0,-1)$ e $(0,1)$.

Esercizio 76 *Determinare le curve di livello, relative alle quote* $z = 0,\ 4,\ 8$*, delle seguenti funzioni:*

$$i) \quad f(x,y) = 2x - 3y + 9 \ ;$$

$$ii) \quad f(x,y) = x^2 - 2y^2 \ ;$$

$$iii) \quad f(x,y) = 2x^2 + 4y^2 \ .$$

Esercizio 77 *Un terreno ha una forma data, in prima approssimazione, dal grafico della funzione* $f(x,y) = x^2 - 2y^2 - 4$*. Determinare le curve di livello relative alle quote* $z = 0$*,* 4*,* 12*.*

Esercizio 78 *Calcolare le derivate parziali rispetto ad* x *ed a* y *delle seguenti funzioni:*

(i) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$*;*

(ii) $f(x,y) = x^2 y - 3xy^4 + x - 10$*;*

(iii) $f(x,y) = x\ \sin 3y$*;*

(iv) $f(x,y) = \sin(x + 2y)$*;*

specificare quindi $\mathrm{grad} f(x,y)$ *per ciascuna delle funzioni.*

Esercizio 79 *La forma di una regione è data in prima approssimazione dal grafico della funzione*

$$f(x,y) = 25 - x^2 - y^2.$$

Detrminare gli eventuali punti di massimo, di minimo o di sella.

Esercizio 80 *La forma di una regione è data in prima approssimazione dal grafico della funzione*

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 3.$$

Determinare gli eventuali punti di massimo, di minimo o di sella.

Esercizio 81 *Determinare, mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, i valori di massimo e di minimo della funzione*

$$f(x,y) = 2x + y + 1$$

sul vincolo $x^2 + y^2 - 1 = 0$*.*

Esercizio 82 *Determinare, mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, i valori di massimo e di minimo della funzione*

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sul vincolo $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$.

Esercizio 83 *Determinare, mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, i valori di massimo e di minimo della funzione*

$$f(x, y) = 4x^2 - y^2$$

sul vincolo $x^2 + y^2 - 1 = 0$.