



Università degli Studi
di Palermo

RISPOSTA DETERMINISTICA ED ALEATORIA DELL'OSCILLATORE ELASTOVISCOSO INVECCHIANTE

C.. Floris*

* Dipartimento di Ingegneria Strutturale (DIS)
Politecnico di Milano
Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, Italy
e-mail: floris@stru.polimi.it

Key words: SDoF linear oscillator, Kelvin damping, aging damping with memory, divergent response with aging damping only, deterministic excitation, Gaussian process excitation.

Parole chiave: oscillatore a 1 gdl, smorzamento alla Kelvin, smorzamento invecchiante con memoria, risposta divergente con solo smorzamento invecchiante, sollecitazione deterministica, sollecitazione stocastica gaussiana.

Abstract. *The dynamic response of a SDoF linear oscillator with both linear damping of Kelvin type and aging viscous damping is analyzed. The integro-differential equation of motion is recast as a third order linear differential equation with variable exponentially decaying coefficients. As regards the deterministic excitations, the free vibrations caused by an impressed displacement, the unit step excitation, and the sinusoidal resonant excitation are considered. The stochastic excitation is a zero mean stationary Gaussian process output of a second order linear filter. In both cases the presence of the Kelvin damping is fundamental: if this is absent the response diverges as the damping goes to zero. Moreover, the response is viscoplastic, that is an impressed displacement is not recovered, differently from the hereditary damping in which it is wholly recovered at infinite time.*

Sommario. *Si esamina la risposta dinamica di un oscillatore ad un grado di libertà lineare dotato di smorzamento senza memoria, detto viscoso, e di smorzamento con memoria di tipo invecchiante espresso dall'integrale di convoluzione nel tempo. L'equazione del moto è trasformata in un'equazione differenziale lineare del terzo ordine a coefficienti variabili, che è integrata numericamente col metodo di Runge-Kutta. La risposta a sollecitazioni deterministiche è confrontata con quella all'oscillatore ad un grado di libertà con smorzamento con memoria di tipo ereditario per vibrazioni libere, spostamento unitario impresso, gradino unitario e sollecitazione sinusoidale risonante. La risposta è viscoplastica e, se è assente lo smorzamento lineare, divergente. In quanto lo smorzamento invecchiante con memoria tende a zero esponenzialmente. In campo stocastico si esamina la risposta ad un processo gaussiano stazionario segnale di uscita di un filtro lineare del secondo ordine: la media quadratica diverge in assenza di smorzamento lineare.*

1 INTRODUZIONE

È ormai divenuta una prassi progettuale comune quella di dotare strutture di diverso tipo, quali travi da ponte, torri, antenne, edifici alti, cavi, di dispositivi dissipatori al fine di ridurre l'ampiezza delle vibrazioni causate da azioni dinamiche quali il vento, il sisma e le onde marine. Una descrizione dei dissipatori di uso più frequente si può trovare nei testi di Naeim e Kelly e di Soong e Dargush [1,2].

I dispositivi dissipatori hanno caratteristiche meccaniche che spaziano dal comportamento elastico-lineare a legami non lineari, a legami di tipo attritivo, a legami senza memoria ed a legami con memoria. In quest'ultimo caso i dispositivi smorzatori sono definiti viscoelastici e le condizioni iniziali in un istante t_0 non sono sufficienti per calcolare la risposta dinamica in un istante $t > t_0$: è necessario conoscere tutta la storia del moto precedente a t .

La dinamica di sistemi con smorzatori di quest'ultimo tipo è stata oggetto di estese ricerche in questi ultimi anni: si citano Adhikari e collaboratori [3 - 6] Ketema [7], Menon e Tang [8], Muravyov e collaboratori [9 - 12], Palmeri e collaboratori [13 - 15]. Pur nella diversità degli approcci questi autori sono accomunati dall'adozione del modello ereditario per il comportamento viscoso: nella ricerca bibliografica compiuta non si sono trovati lavori basati su altri modelli per la viscosità.

Il modello ereditario presenta l'indubbio vantaggio di permettere l'uso di strumenti analitici di soluzione, quali la trasformata di Laplace, il metodo della perturbazione, l'analisi in campo complesso degli autovalori ed il metodo delle variabili di stato addizionali. Tuttavia, come è noto, nel modello ereditario le proprietà del materiale sono costanti nel tempo e la risposta nell'istante t per carico applicato in t_0 dipende solo da $t - t_0$. Questo comportamento non è realistico per molti materiali strutturali, le cui proprietà variano nel tempo ed in particolare esibiscono invecchiamento (aging) e degrado. Questo fatto, noto da molto tempo, portò circa 70 anni fa indipendentemente da parte di Krall, Dischinger e Whitney alla formulazione del modello elastoviscoso invecchiante.

Nel presente lavoro si affronta probabilmente per la prima volta il problema della determinazione della risposta dell'oscillatore elastoviscoso invecchiante: con alcuni passaggi matematici l'equazione integrodifferenziale del moto è trasformata in un'equazione differenziale del terzo ordine lineare a coefficienti variabili. Riscontrata l'impossibilità di risolverla analiticamente, si presenta la soluzione numerica per alcuni casi notevoli di carico, trovando che la risposta è divergente in assenza di smorzamento classico. Si determina poi in termini di momenti statistici secondi la risposta stocastica per una sollecitazione di tipo gaussiano stazionario filtrato.

2 FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

L'equazione del moto di un oscillatore elastoviscoso lineare a un grado di libertà (Fig. 1) può essere scritta come

$$\ddot{q}(t) + 2\zeta_0\omega_0\dot{q}(t) + \omega_0^2q(t) - \omega_0^2\int_0^t\Gamma(t,t')q(t')dt' = f(t). \quad (1)$$

Nell'Eq. 1 il secondo addendo fornisce lo smorzamento classico, senza memoria, mentre l'ultimo addendo quello con memoria, che tiene in conto la storia passata del moto attraverso il nucleo di rilassamento $\Gamma(t,t')$. Si noti che l'Eq. (1) è la generalizzazione in campo dinamico della classica legge elastoviscosa lineare di rilassamento (nella vasta letteratura sulla viscosità

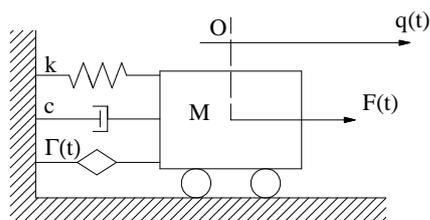


Figura 1. Idealizzazione dell'oscillatore ad un grado di libertà con smorzamento classico, c , e di tipo viscoso, $\Gamma(t)$.

per approfondimenti si rimanda a [16 - 20]):

$$\sigma(t, t_0) = \varepsilon(t) \cdot E(t) - \int_0^t \varepsilon(t') \cdot \Gamma(t, t') dt' = \varepsilon(t) \cdot E(t) - \int_0^t \varepsilon(t') \cdot \frac{\partial R(t, t')}{\partial t'} dt', \quad (2)$$

in cui $R(t, t')$ è la funzione di rilassamento, legata alla funzione di viscosità $J(t, t')$ dalla relazione integrale (si vedano le referenze citate)

$$1 = \frac{R(t, t_0)}{E(t_0)} + \int_0^t R(t, t') \cdot \frac{\partial J(t, t')}{\partial t'} dt'. \quad (3)$$

Come anticipato nell'introduzione, a conoscenza di chi scrive, tutti gli autori assumono nuclei di rilassamento della forma di una serie di Dirichlet-Prony, cioè

$$\Gamma(t, t') = \Gamma(t - t') = \sum_i a_i \exp[-\beta_i(t - t')], \quad (4)$$

cioè nuclei ereditari, che, qualora si consideri un solo termine nella serie, degenerano nel modello ereditario classico [19]. Come è noto, nel modello viscoelastico ereditario le proprietà del materiale non variano nel tempo, il che rende impossibile tenere in conto l'invecchiamento del materiale.

Nel presente lavoro il comportamento viscoso è descritto dal classico modello invecchiante di Krall-Dischinger-Whitney [19 - 21], la cui funzione di rilassamento è, a meno della costante che dà la rigidità elastica

$$\bar{R}(t, t') = \{ \exp[-\varphi_\infty \exp(-\beta t')] \} \cdot \{ \exp[\varphi_\infty \exp(-\beta t)] \}, \quad (5)$$

in cui si è posto $t_0 = 0$.

Si vuole ricordare la profonda differenza intrinseca tra il modello ereditario e quello invecchiante: se si applica ad un provino una tensione costante σ_0 tra l'istante t_0 e l'istante t_1 , nel primo caso in t_1 si recupera la deformazione elastica iniziale σ_0/E ; successivamente si ha un recupero delle deformazioni viscosi sviluppatasi tra t_0 e t_1 ed a $t = \infty$ la deformazione risulta nulla (Fig. 2). Al contrario, nel comportamento invecchiante all'atto dello scarico in t_1 si recupera la deformazione $\sigma_0/E(t_1)$, che può essere maggiore o minore della deformazione iniziale $\sigma_0/E(t_0)$ a seconda che il modulo elastico, in generale funzione del tempo $E(t)$, decresca (comportamento softening) o cresca nel tempo (comportamento hardening); nel proseguo per semplicità assumeremo E costante. Per $t > t_1$ la deformazione resta costante in quanto le curve di viscosità per differenti istanti di carico sono parallele in verticale (si vedano le referenze citate; Fig. 3): allora, le deformazioni viscosi esplicatesi tra t_0 e t_1 sono perma-

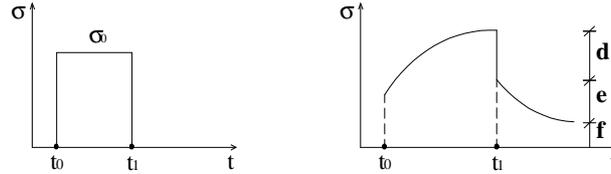


Figura 2: modello ereditario: risposta nel tempo a carico costante tra t_0 e t_1 .

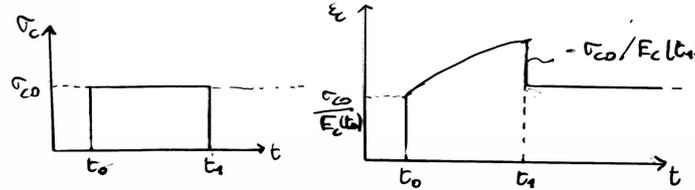


Figura 3: modello invecchiante: risposta nel tempo a carico costante tra t_0 e t_1 .

menti, cioè il modello invecchiante è di tipo viscoplastico.

Sostituendo l'Eq. 5 nell'Eq. 1, moltiplicando ambi i membri per $\exp[-\varphi_\infty \exp(-\beta t)]$ e derivando rispetto a t , si perviene all'equazione differenziale a coefficienti variabili

$$\dot{\varphi}(t) + [\beta_0 + \varphi_B g(t)] \varphi(t) + [\omega_0^2 + \beta_0 \varphi_B g(t)] \varphi(t) = \varphi_B g(t) f(t) + \dot{f}(t), \quad (6)$$

ove $\beta_0 = 2\zeta_0 \omega_0$, $\varphi_B = \varphi_\infty \beta$, $g(t) = \exp(-\beta t)$.

Come noto, le equazioni differenziali a coefficienti variabili raramente ammettono una soluzione analitica: dall'esame della letteratura in materia non si sono trovati metodi analitici per risolvere l'Eq. 6, per cui nelle applicazioni si è ricorso ai solutori dei programmi MAPLE e MATLAB, che utilizzano il metodo di integrazione di Runge-Kutta. Per eseguire l'integrazione, introdotte le variabili di stato, l'Eq. (6) è ridotta al seguente sistema di 3 equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = \varphi_1(t) x_3(t) + \varphi_2(t) x_2(t) + \varphi_3(t) f(t) + \dot{f}(t) \end{cases}, \quad (7)$$

ove $x_1 = q(t)$, $x_2 = \dot{q}(t)$ e $x_3 = \ddot{q}(t)$, $\varphi_1(t) = -\beta_0 - \varphi_B g(t)$, $\varphi_2(t) = -\omega_0^2 - \beta_0 \varphi_B g(t)$, $\varphi_3(t) = \varphi_B g(t)$ e con le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x_1(t_0) = q(t_0) = \alpha \\ x_2(t_0) = \dot{q}(t_0) = \beta, \\ x_3(t_0) = \ddot{q}(t_0) = \gamma \end{cases} \quad (8)$$

Se si adotta un passo di integrazione $h = t_{i+1} - t_i$ dell'ordine di 10^{-2} , il metodo RK-4 assicura un'errore dell'ordine di $O(h^5)$, cioè di 10^{-10} .

Esaminando in dettaglio l'Eq. 6, l'equazione caratteristica ad essa associata è

$$\lambda^3 + [\beta_0 + \varphi_B g(t)] \lambda^2 + [\omega_0^2 + \beta_0 \varphi_B g(t)] \lambda = 0, \quad (9)$$

che ha un autovalore nullo ed i due autovalori

$$\lambda_{2,3} = -\frac{\beta_0}{2} - \frac{\varphi_B}{2} g(t) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\beta_0^2 - 2\beta_0 g(t) + \varphi_B^2 g^2(t) - 4\omega_0^2}. \quad (10)$$

In presenza di smorzamento classico ($\beta_0 > 0$) la risposta è sicuramente stabile in quanto la somma dei primi 2 termini è negativa, mentre la radice dà sicuramente luogo ad un valore immaginario per valori dei parametri che si hanno nelle strutture reali, cioè gli autovalori sono complessi con parte reale negativa. In mancanza di smorzamento classico ($\beta_0 = 0$), essendo $g(t)$ una funzione esponenziale decrescente e, quindi, trascurabile dopo un certo lasso di tempo, gli autovalori diventano

$$\lambda_{2,3} = \pm 2\omega_0 i, \quad (11)$$

essendo i l'unità immaginaria. L'oscillatore risulta privo di smorzamento, per cui la risposta ad una qualunque sollecitazione cresce nel tempo, come sarà confermato dalle analisi numeriche.

3 RISPOSTA A SOLLECITAZIONE STOCASTICA DI TIPO GAUSSIANO

Sia ora $f(t)$ nell'Eq. 6 un processo stocastico gaussiano: si fa riferimento a questo tipo di sollecitazione in quanto importanti azioni strutturali quali il terremoto, la turbolenza e la forza esercitata dalle onde sono assunte essere processi gaussiani. Tra le diverse classi di processi gaussiani è da escludere come sollecitazione applicata quella dei rumori bianchi, poiché nella (6) appare la derivata della sollecitazione $\dot{f}(t)$ e come noto i processi bianchi non sono derivabili.

Per un processo gaussiano generico, stazionario o non stazionario, non bianco la media quadratica al tempo t è data dall'equazione

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{FF}(\tau_1, \tau_2) h(t-\tau_1) h(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (12)$$

in cui $R_{FF}(\tau_1, \tau_2)$ è l'autocorrelazione della sollecitazione $F(t) = \varphi_B g(t) f(t) + \dot{f}(t)$ a secondo membro dell'Eq. 6, da assumersi nulla quando τ_1 o $\tau_2 < 0$. Il problema di difficile soluzione per impiegare la (12) è la determinazione della funzione di risposta impulsiva del sistema $h(t)$, cosa che richiede di risolvere l'equazione per la sollecitazione $\varphi_B g(t) \delta(t) + \dot{f}(t)$, che contiene la derivata della distribuzione di Dirac. Attesa la difficoltà della cosa, questa strada non sarà seguita qui. Si noti che questa è un'altra differenza importante del modello invecchiante da quello ereditario, per il quale la funzione di risposta impulsiva e la sua trasformata di Fourier sono determinabili analiticamente [14 - 15].

Anche se la sollecitazione non può essere un rumore bianco $W(t)$, è ugualmente possibile affrontare il problema nel contesto dei metodi di Markov della dinamica stocastica [22] ed in particolare ricorrendo al calcolo differenziale stocastico di Itô con l'approccio ai momenti [23]. La via è percorribile se $f(t)$ è un processo gaussiano filtrato derivabile, ad esempio il segnale di uscita del filtro del secondo ordine

$$\ddot{f}(t) + \beta_f \dot{f}(t) + \omega_f^2 f(t) = \sqrt{\pi w_f} W(t), \quad (13)$$

che sarà considerato qui.

La forma di stato (7) con cui si può scrivere l'equazione del moto si presta alla scrittura delle equazioni dei momenti statistici della risposta. Considerando la funzione non anticipante delle variabili di stato

$$\phi = x_1^p x_2^q x_3^r x_4^s x_5^t \quad (x_4 = f, x_5 = \dot{f}), \quad (14)$$

l'equazione generatrice dei momenti risulta come

$$\begin{aligned} m_{pqrst} &= p \cdot m_{p-1,q+1,rst} + q \cdot m_{p,q-1,r+1,st} - r\phi_1(t) m_{pqrst} - r\phi_2(t) m_{p,q-1,r-1,st} + \\ & r\phi_3(t) m_{pq,r-1,s+1,t} + r \cdot m_{pq,r-1,s,t+1} + s \cdot m_{pqr,s-1,t+1} - t\beta_f m_{pqrst} - \\ & t\omega_f^2 m_{pqr,s+1,t-1} + 1/2 t(t-1)\sqrt{\pi\omega_f} m_{pqrs,t-2} \end{aligned} \quad (15)$$

in cui $m_{pqrst} = E[x_1^p x_2^q x_3^r x_4^s x_5^t]$.

Si osserva: (1) la sollecitazione è un processo gaussiano in quanto data dalla somma dei processi gaussiani $f(t)$ ed $\dot{f}(t)$; (2) il sistema, ancorché a coefficienti variabili, è lineare, donde la risposta è un vettore $\mathbf{q} = \{q, \dot{q}\}^t$ di processi gaussiani; (3) come noto, un processo gaussiano è completamente caratterizzato dalle sue statistiche del primo e del secondo ordine, per cui in un approccio ai momenti l'Eq. 15 va scritta per $p + q + r + s + t = 1, 2$. Ciò dà luogo ad un sistema di 5 equazioni differenziali del primo ordine nelle medie e ad un sistema di 15 equazioni differenziali nei momenti secondi: nelle analisi numeriche tali sistemi sono integrati numericamente con la routine odesolve di MAPLE, che impiega il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine.

4 ANALISI NUMERICHE

4.1 Risposta a sollecitazioni deterministiche

Si è dapprima considerata la risposta dell'equazione integrodifferenziale (1) per casi notevoli di sollecitazione, risolvendo numericamente il sistema differenziale del primo ordine a coefficienti variabili (7). Per quanto riguarda le vibrazioni libere si è analizzato il caso di spostamento unitario impresso nell'istante iniziale, cioè $q(0) = 1$. Il sistema è dotato anche di smorzamento classico caratterizzato dalla costante $\zeta_0 = 0.025$; la velocità di creep è $\beta = 0.05 s^{-1}$, mentre il parametro ϕ_∞ , che esprime il rapporto tra la deformazione viscosa a tempo infinito e quella elastica iniziale, vale 2.

In Fig. 4 sono confrontate le risposte dell'oscillatore ereditario (sinistra) dell'oscillatore invecchiante (destra): nel primo caso dopo 40 s di moto le oscillazioni hanno ampiezza trascurabile e lo spostamento impresso è recuperato. Nel secondo caso le oscillazioni si smorzano più lentamente e tendono a circa 1.18: appare evidente che il carattere viscoplastico del modello invecchiante si mantiene anche in campo dinamico con notevoli spostamenti residui dati dalla somma dello spostamento impresso e dalle deformazioni viscose esplicitatesi.

In Fig. 5 si danno le risposte dell'oscillatore ereditario (sinistra) e di quello invecchiante (destra) ad un gradino di carico di durata 30 s (i valori dei parametri sono i medesimi del caso precedente). Dopo un rapido aumento dello spostamento l'oscillatore ereditario mostra oscillazioni con massimo crescente sino a $t = 30 s$, quando lo spostamento diminuisce bruscamente per la rimozione del carico. Per $t > 30 s$ si notano oscillazioni rapidamente de-

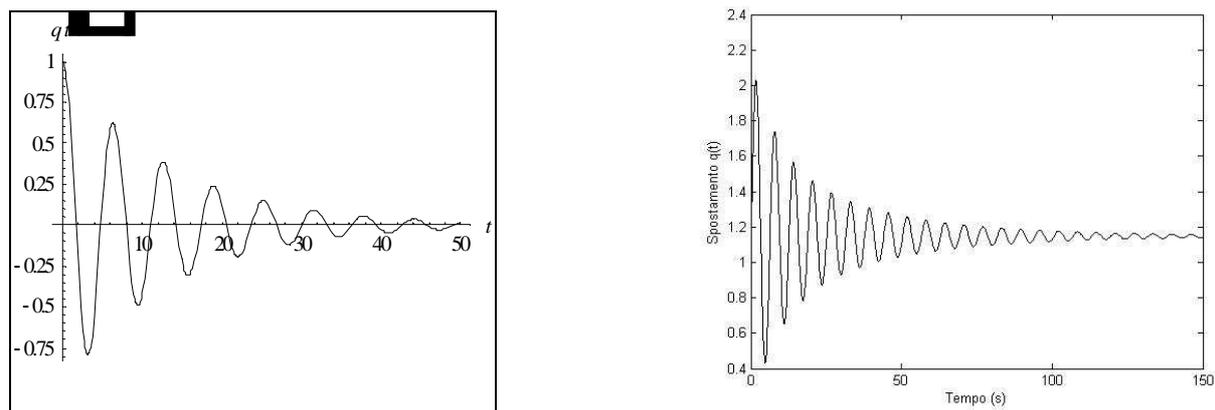


Figura 4. Vibrazioni libere: risposta a spostamento iniziale impresso $q(0) = 1$ per il modello ereditario (sinistra) ed il modello invecchiante (destra) coi valori dei parametri $\zeta_0 = 0.025$, $\omega_0 = 1$, $\varphi_\infty = 2$, $\beta = 0.05$.

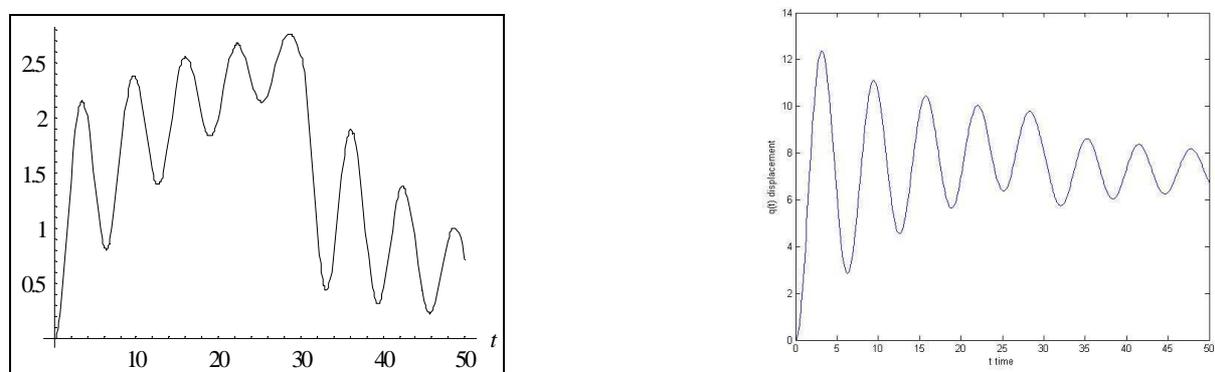


Figura 5: vibrazioni forzate: risposta gradino di carico di durata 30 s con condizioni iniziali omogenee per il modello ereditario (sinistra) ed il modello invecchiante (destra) coi valori dei parametri $\zeta_0 = 0.025$, $\omega_0 = 1$, $\varphi_\infty = 2$, $\beta = 0.05$.

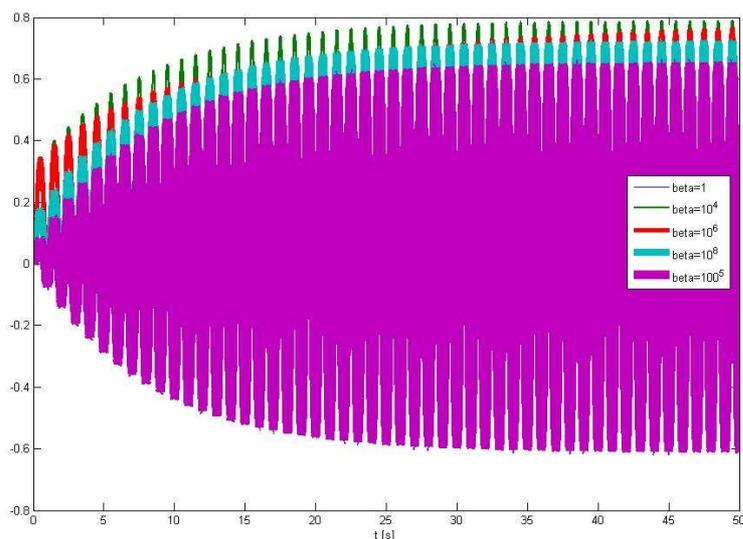


Figura 6: vibrazioni forzate dell'oscillatore invecchiante: risposta a sollecitazione sinusoidale risonante per diversi valori delle velocità di creep β da 1 a 10^{10} s^{-1} con condizioni iniziali $[0, 0, 2\pi]$ ($\omega_0 = 1$, $\zeta_0 = 0.025$, $\varphi_\infty = 2$).

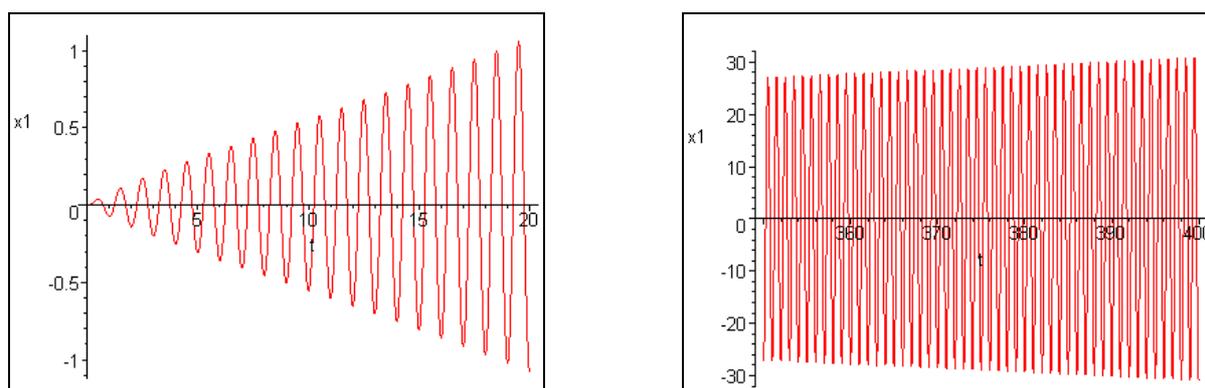


Figura 7: vibrazioni forzate dell'oscillatore invecchiante: risposta a sollecitazione sinusoidale risonante per condizioni iniziali omogenee senza smorzamento classico ($\zeta_0 = 0$) e parametri $\omega_0 = 2\pi$, $\varphi_\infty = 2$, $\beta = 0.1$.

decrementi.

L'oscillatore invecchiante (Fig. 5 destra) ha una risposta notevolmente differente: immediatamente dopo l'applicazione del carico lo spostamento cresce monotonicamente fino ad un valore circa quadruplo di quello massimo dell'oscillatore ereditario; in seguito si hanno oscillazioni decrescenti e manca una discontinuità dovuta alla rimozione del carico tendendosi con tutta evidenza ad un valore non nullo dello spostamento, cosa che prova ancora il carattere viscoplastico del modello invecchiante.

L'analisi successiva è finalizzata a mettere in luce gli effetti della velocità di creep β : questo parametro varia tra 1 e 10^{10} s^{-1} (valori elevati di β non sono in realtà riscontrabili: sono stati adottati solo per lo scopo indicato), mentre gli altri parametri sono $\omega_0 = 1$, $\zeta_0 = 0.025$, $\varphi_\infty = 2$. La sollecitazione è di tipo sinusoidale risonante, cioè:

$$f(t) = w \cdot \sin(\omega_0 t), \quad (16)$$

che a secondo membro dell'Eq. 6 dà luogo a

$$F(t) = \varphi_B e^{-\beta t} w \sin(\omega_0 t) + \omega_0 w \cos(\omega_0 t). \quad (17)$$

Nell'Eq. (17) i parametri assumono i valori sopra indicati.

Le risposte per i diversi valori di β sono tracciate in Fig. 6: per valori medio-alti di β lo smorzamento elastoviscoso diventa rapidamente trascurabile, non si hanno deformazioni viscosi ed il sistema si riduce ad un oscillatore con smorzamento classico, che oscilla in maniera armonica attorno al valore nullo dello spostamento. Per valori minori di β la forma delle oscillazioni non cambia, ma, essendosi prodotte deformazioni viscosi, che, come si è visto, sono permanenti nel comportamento invecchiante, avvengono attorno ad un valore non nullo dello spostamento.

In Fig. 7 è mostrata la risposta dell'oscillatore elastoviscoso invecchiante privo di smorzamento classico e soggetto alla sollecitazione (16), mentre gli altri parametri assumono i valori $\omega_0 = 2\pi$, $\varphi_\infty = 2$, $\beta = 0.1$. In accordo con quanto trovato esaminando l'equazione caratteristica (9), la risposta ha ampiezze di oscillazione continuamente crescenti nel tempo in quanto il sistema ha perso ogni capacità di smorzamento.

In Fig. 8 sono mostrati i risultati della stessa analisi, ma con smorzamento classico ($\zeta_0 = 0.05$): dopo circa 20 cicli di oscillazioni si raggiunge con tutta evidenza il regime stazionario.

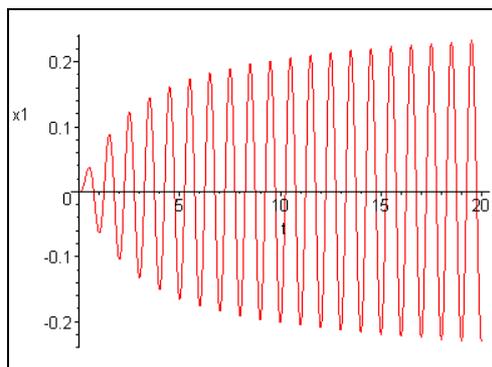


Figura 8: vibrazioni forzate dell'oscillatore invecchiante: risposta a sollecitazione sinusoidale risonante per condizioni iniziali omogenee con smorzamento classico ($\zeta_0 = 0.05$) e parametri $\omega_0 = 2\pi$, $\varphi_\infty = 2$, $\beta = 0.1$.

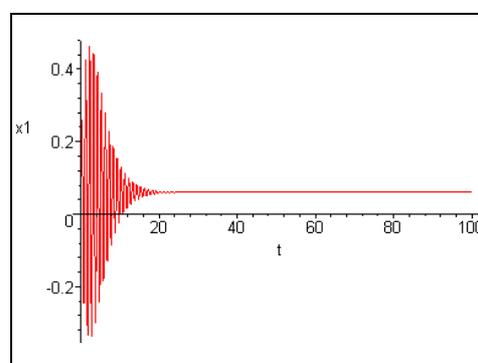
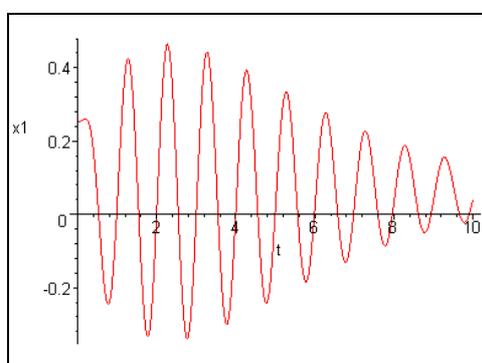


Fig. 9: media della risposta per sollecitazione gaussiana filtrata: dettaglio dei primi 10 s di moto (sinistra), risposta su 100 s (destra): $\zeta_0 = 0.05$, $E[f(0)] = \mu$, $E[q(0)] = \mu/\omega_0^2$, $\beta = 1$, $\varphi_\infty = 3$, $\omega_0 = 2\pi$ ($x1 = E[q]$).

4.2 Risposta a sollecitazioni aleatorie di tipo gaussiano filtrato

Come illustrato nella sezione 3, la sollecitazione $f(t)$ è data dal segnale di uscita del filtro (13), la quale è sicuramente derivabile poiché le funzioni densità spettrale di potenza $f(t)$ e di $\dot{f}(t)$ sono rispettivamente:

$$S_{ff}(\omega) = \frac{\pi w_f}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + \beta_f^2 \omega^2} \quad S_{\dot{f}\dot{f}}(\omega) = \frac{\pi w_f \omega^2}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + \beta_f^2 \omega^2}, \quad (18,19)$$

Anche $S_{\dot{f}\dot{f}}$ è infinitesima per $\omega \rightarrow \infty$.

La sollecitazione è stazionaria, mentre la risposta non lo è perché l'equazione del moto è a coefficienti variabili; tuttavia, essendo questi esponenziali decrescenti, si tende asintoticamente al regime stazionario, a patto che sia presente lo smorzamento classico. In ogni caso, le equazioni dei momenti sono considerate differenziali e di conseguenza integrate.

La prima analisi compiuta ha lo scopo di mostrare l'andamento della media $E[q(t)]$ nel

caso in cui la condizione iniziale per il filtro non sia nulla e vi sia smorzamento classico (Fig.

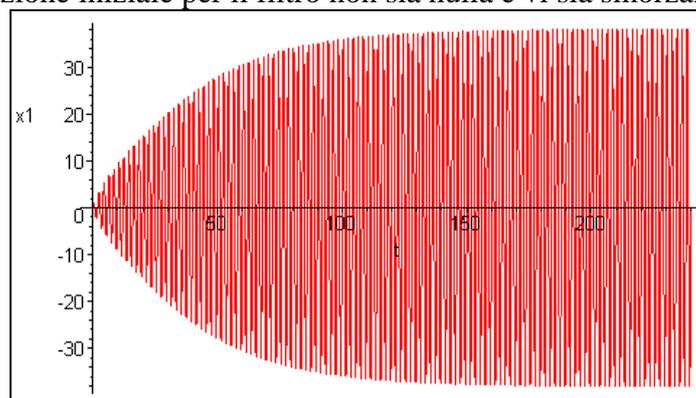


Fig. 10: media della risposta per sollecitazione gaussiana filtrata: $\zeta_0 = 0$, $E[f(0)] = \mu$, $E[q(0)] = \mu/\omega_0^2$, $\beta = 0.1$, $\varphi_\infty = 3$, $\omega_0 = \pi$, $\zeta_f = 0.01$ ($x1 = E[q]$).

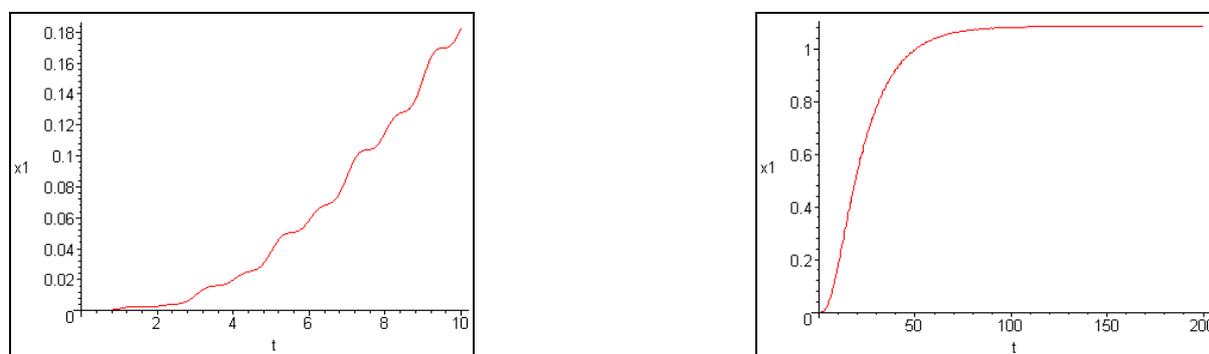


Fig. 11: media quadratica $E[q^2(t)]$ dell'oscillatore elastoviscoso invecchiante (indicata con $x1$ sull'asse delle ordinate) per $\beta = 1$, $\zeta_0 = 0.05$, $\zeta_f = 0.01$, $\omega_0 = \omega_f = \pi$, condizioni iniziali omogenee.

9): $E[f(0)] = \mu$. Si ha un transitorio in cui la media raggiunge valori notevoli, poi dopo 20 s di moto, quando i termini contenenti l'esponenziale sono trascurabili, il sistema raggiunge di fatto la quiete restando q al valore μ/ω_0^2 .

La Fig. 10 riporta il risultato della stessa analisi compiuto coi seguenti valori dei parametri: $\zeta_0 = 0$, $\beta = 0.1$, $\varphi_\infty = 3$, $\omega_0 = \omega_f = \pi$, $\zeta_f = 0.01$. È l'unico caso tra le analisi compiute in cui, pur in assenza di smorzamento classico la risposta non sembra divergere. Tuttavia, vi è da dire che non è stato possibile proseguire l'integrazione oltre 240 s per una limitazione intrinseca del solutore odesolve di MAPLE: non è da escludere che in questo caso l'aumento dell'ampiezza di oscillazione sia molto lento, per cui la divergenza della risposta non è osservabile nella figura.

Ora si presenteranno le curve della media quadratica della risposta $E[q^2]$ in funzione del tempo per diverse scelte dei parametri. La Fig. 11 riguarda il caso in cui è attivo anche lo smorzamento classico con rapporto rispetto al valore critico $\zeta_0 = 0.05$ e condizioni iniziali omogenee: $E[q^2]$ cresce lentamente nel tempo, molto più lentamente di quanto si ha in un oscillatore con solo smorzamento classico ed il regime stazionario è raggiunto dopo circa 80 s, che corrispondono a 40 cicli di moto per un oscillatore lineare con solo smorzamento classico avente pulsazione ω_0 uguale a π .

In Fig. 12 è mostrata la media quadratica dello spostamento per il caso in cui manca lo smorzamento classico ($\zeta_0 = 0$), conservando gli altri parametri i valori del caso precedente: la

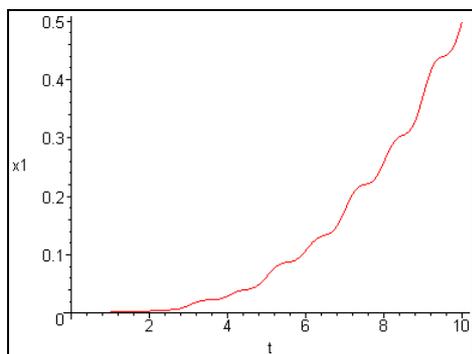


Fig. 12: media quadratica $E[q^2(t)]$ dell'oscillatore elastoviscoso invecchiante (indicata con x1 sull'asse delle ordinate) per $\beta = 1$, $\zeta_0 = 0$, $\zeta_f = 0.01$, $\omega_0 = \omega_f = \pi$, condizioni iniziali omogenee.

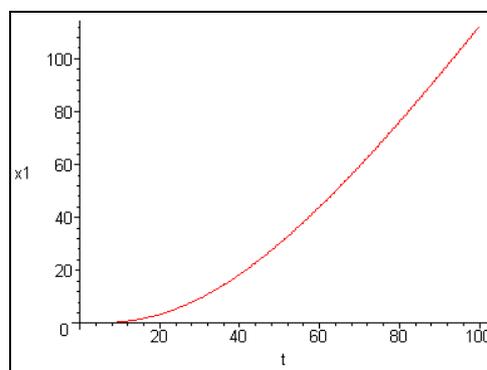
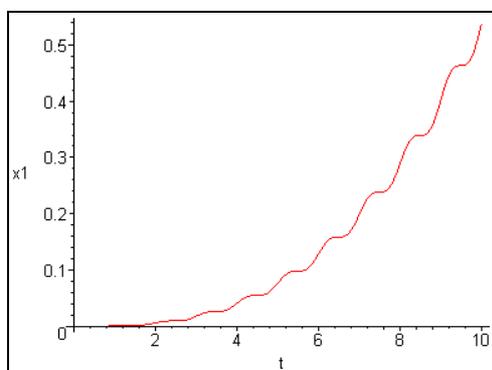


Fig. 13: media quadratica $E[q^2(t)]$ dell'oscillatore elastoviscoso invecchiante (indicata con x1 sull'asse delle ordinate) per $\beta = 0.12 \cdot 10^{-7}$, $\zeta_0 = 0$, $\zeta_f = 0.01$, $\omega_0 = \omega_f = \pi$, condizioni iniziali omogenee.

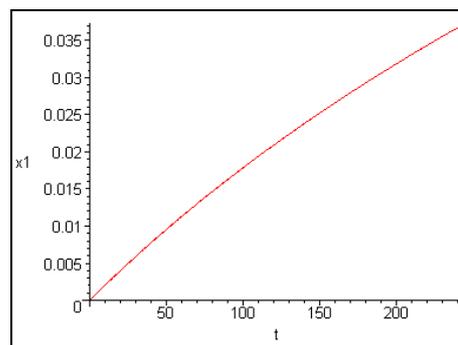
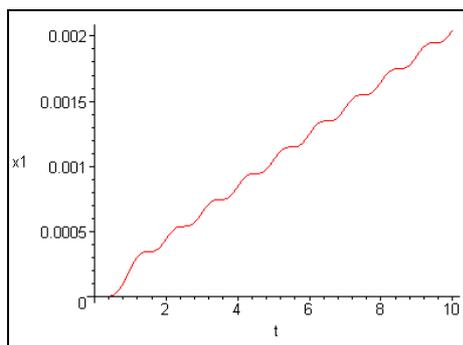


Fig. 14. Media quadratica $E[q^2(t)]$ dell'oscillatore elastoviscoso invecchiante (indicata con x1 sull'asse delle ordinate) per $\beta = 0.001$, $\zeta_0 = 0$, $\zeta_f = 1$, $\omega_0 = \omega_f = \pi$, condizioni iniziali omogenee.

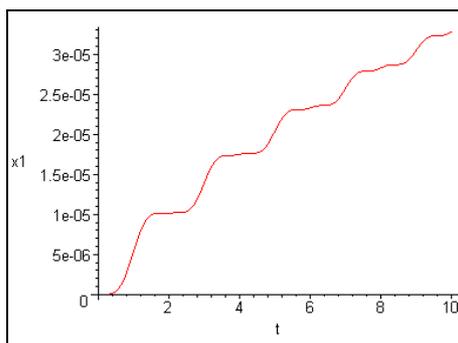


Fig. 15: media quadratica $E[q^2(t)]$ dell'oscillatore elastoviscoso invecchiante (indicata con $x1$ sull'asse delle ordinate) per $\beta = 0.001$, $\zeta_0 = 0$, $\zeta_f = 10$, $\omega_0 = \omega_f = \pi$, condizioni iniziali omogenee.

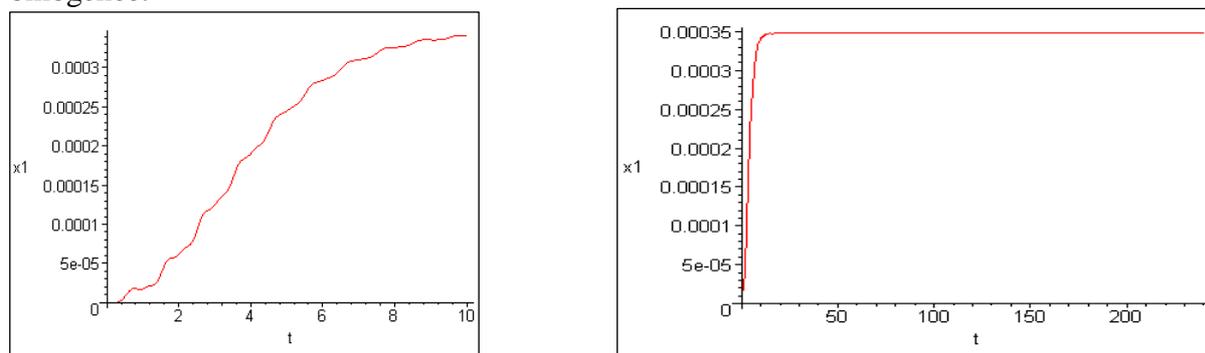


Fig. 16: media quadratica $E[q^2(t)]$ dell'oscillatore elastoviscoso invecchiante (indicata con $x1$ sull'asse delle ordinate) per $\beta = 1$, $\zeta_0 = 0.05$, $\zeta_f = 0.1$, $\omega_0 = \omega_f = 2\pi$, condizione iniziale non omogenea del filtro $f(0) = \mu = 10$.

divergenza della media quadratica è evidente, crescendo questa in maniera monotonica col tempo.

Volendosi accertare quanto la velocità di creep possa influire sulla divergenza della media quadratica si è esaminato un caso di velocità molto lenta $\beta = 0.12 \cdot 10^{-7}$, lasciando gli altri parametri invariati (si noti che tale valore della velocità di creep non è teorico: i calcestruzzi presentano velocità di creep dell'ordine di $0.001 - 0.005$ giorni $^{-1}$, cioè dell'ordine di 10^{-7} s $^{-1}$): risulta la curva di Fig. 13, che mostra un comportamento sostanzialmente invariato rispetto alla Fig. 12, il che farebbe pensare ad una scarsa efficacia dello smorzamento con memoria di tipo invecchiante.

Nelle analisi seguenti (Figg. 14, 15) si è voluto accertare l'effetto sulla media quadratica della larghezza di banda del filtro, che è misurata dal parametro ζ_f nell'Eq.13, per cui si sono scelti i valori $\zeta_f = 1$ (Fig. 14) e $\zeta_f = 10$ (Fig. 15). Appare evidente che sotto una sollecitazione a banda larga $E[q^2]$, pur crescendo nel tempo, ha una crescita lenta, tanto più lenta quanto maggiore è la banda della sollecitazione: le ragioni di questo fatto non sono state accertate.

In Fig. 16 è diagrammata la media quadratica dello spostamento per $\beta = 1$, $\zeta_0 = 0.05$, $\zeta_f = 0.1$, $\omega_0 = \omega_f = 2\pi$ con condizione iniziale non omogenea del filtro $f(0) = \mu = 10$: essendo presente lo smorzamento classico ed abbastanza elevata la velocità di creep, il regime stazionario è raggiunto rapidamente, dopo circa 15 s, cioè 15 periodi di oscillazione.

5 CONCLUSIONI

Si possono trarre le seguenti conclusioni:

(1) si è compiuta l'analisi dell'oscillatore lineare elastoviscoso invecchiante ad un grado di libertà sia in campo deterministico che aleatorio, considerando in particolare nel secondo caso una sollecitazione data da un processo gaussiano filtrato stazionario. L'equazione integro-differenziale del moto è trasformata in un'equazione differenziale del terzo ordine a coefficienti variabili, che poi è riscritta in forma di stato come sistema di 3 equazioni differenziali del primo ordine.

(2) Per sollecitazione deterministica una soluzione analitica è difficilmente determinabile, per cui si ricorre alla soluzione numerica col metodo di Runge-Kutta del quarto ordine. Analogamente numerica è la soluzione delle equazioni nei momenti statistici della risposta, che sono scritte utilizzando la regola differenziale di Itô e sono di tipo differenziale in quanto a coefficienti variabili.

(3) Tanto per sollecitazioni deterministiche che per sollecitazioni aleatorie appare essenziale che nel sistema strutturale lo smorzamento classico (proporzionale alla velocità) agisca in parallelo al meccanismo viscoso invecchiante. Infatti, questo decade nel tempo in maniera esponenziale e risulta in breve inattivo: se manca il primo, il sistema diventa, quindi, di tipo non smorzato e la risposta diverge. Quindi, dotando una struttura di un dissipatore a comportamento invecchiante, questo deve avere velocità di creep bassa e si può contare su di esso solo per sollecitazioni di breve durata.

(4) Tuttavia, i materiali reali elastoviscosi non sono né puramente ereditari né puramente invecchianti, ma esibiscono un comportamento intermedio tra l'ereditario e l'invecchiante. Insorge, quindi, la necessità di studiare oscillatori in cui la risposta viscosa sia retta da funzioni di viscosità del tipo prodotto

$$J(t, t') = \frac{1}{E(t')} + \frac{1}{E(t')} J_h(t-t') \cdot J_a(t'). \quad (20)$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. Naeim and J.M. Kelly, *Design of Seismic Isolated Structures*, John Wiley & Sons, New York (NY), (1999).
- [2] T.T. Soong and G.F. Dargush, *Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering*, John Wiley & Sons, New York (NY), (1997).
- [3] S. Adhikari, "Dynamics of nonviscously damped linear systems", *J. Engng. Mech. ASCE*, **128**(3), 328-339 (2002).
- [4] S. Adhikari and N. Wagner, "Analysis of Asymmetric nonviscously damped linear dynamic systems", *J. Appl. Mech. ASME*, **70**, 885-893 (2003).
- [5] S. Adhikari and N. Wagner, "Direct time-domain integration method for exponentially damped linear systems", *Comp. Struct.*, **82**, 2453-2461 (2004).
- [6] D.J. Wagg and S. Adhikari, "On the dynamics of a Duffing Oscillator with an exponential non-viscous damping model", *Proc. of the 8th Int. Conf. on Computational Structures Technology*, Las Palmas (Spain) Sept. 2006. Topping B.H.V., Montero G. and Montenegro R. editors. Civil-Comp Press, paper 75 (CD-ROM edition), (2006).
- [7] Y. Ketema, "Approximate model for a viscoelastic oscillator", *J. Appl. Mech. ASME*, **70**, 757-761 (2003).

-
- [8] S. Menon and J. Tang, "A state-space approach for the dynamic analysis of viscoelastic systems", *Comp. Struct.*, **82**, 1123-1130 (2004).
- [9] A. Muravyov, "Analytical solutions in the time domain for vibration problems of discrete viscoelastic system", *J. Sound Vib.*, **199**(2), 337-48 (1997).
- [10] A. Muravyov, "Forced Vibration Responses of a Viscoelastic Structure", *J. Sound Vib.*, **218**(5), 892-907 (1998).
- [11] A. Muravyov and S.G. Hutton, "Closed-form solutions and the eigenvalue problem for vibration of discrete viscoelastic systems", *J. Appl. Mech. ASME*, **64**, 684-691 (1997).
- [12] A. Muravyov and S.G. Hutton, "Free vibration response characteristics of a simple elasto-hereditary system", *J. Vib. Acoust. ASME*, **120**, 628-32 (1998).
- [13] A. Palmeri, F. Ricciardelli, A. De Luca and G. Muscolino, "State space formulation for linear viscoelastic dynamic systems with memory", *J. Engng. Mech. ASCE*, **129**(7), 715-724 (2003).
- [14] A. Palmeri, F. Ricciardelli, A. De Luca and G. Muscolino, "Random vibration of systems with viscoelastic memory", *J. Engng. Mech. ASCE*, **130**(9), 1052-1061 (2004).
- [15] A. Palmeri, "Correlation coefficients for structures with viscoelastic dampers", *Engng. Struct.*, **28**, 1197-1208 (2006).
- [16] Z.P. Bažant et al., *State-of-Art Report on Creep and Shrinkage of Concrete: Mathematical Modeling*, in "Fourth RILEM Int. Symposium on Creep and Shrinkage of Concrete: Mathematical Modeling"; Bažant Z.P. editor, Northwestern University, Evanston (IL), (1986).
- [17] A. Carini and O. De Donato, "Fundamental solutions for linear viscoelastic continua", *Int. J. Sol. Struct.*, **29**, 2989-3009 (1992).
- [18] G.J. Creus. *Viscoelasticity - Basic Theory and Applications to Concrete Structures*, Lecture Notes in Engineering 16, Springer-Verlag, Berlin, (1985).
- [19] A. Migliacci A. *Applicazione dei Principi di Viscosità*, Quaderno n° 2 Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato Fratelli Pesenti, Politecnico di Milano, Tamburini, Milano, (1971).
- [20] W. Nowacki, *Théorie du Fluage*, Eyrolles, Paris, (1970).
- [21] K.R. Rajagopal and A.S. Wineman, "A note on viscoelastic materials that can age", *Int. J. Non-Lin. Mech.*, **39**, 1547-1554 (2004).
- [22] Y.K. Lin and G.Q. Cai, *Probabilistic Structural Dynamics: Advanced Theory and Applications*, Mc Graw-Hill, New York (NY), (1995).
- [23] M. Di Paola, *Stochastic Differential Calculus*, in "Dynamic Motion Chaotic and Stochastic Behaviour", Casciati F. editor, Springer-Verlag, Wien, 29-92, (1993).