Introduzione alle wavelets ed alla MRA

Fabio Bagarello

Palermo – Dicembre 2016

I. Di cosa parleremo....

1. qualche richiamo sugli spazi di Hilbert...

I. Di cosa parleremo....

1. qualche richiamo sugli spazi di Hilbert...

2. ...e su alcune basi o.n. di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

I. Di cosa parleremo....

1. qualche richiamo sugli spazi di Hilbert...
2. ...e su alcune basi o.n. di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$
3. cosa fa e cosa **non** fa la trasformata di Fourier

I. Di cosa parleremo....

1. qualche richiamo sugli spazi di Hilbert...
2. ...e su alcune basi o.n. di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$
3. cosa fa e cosa **non** fa la trasformata di Fourier
4. trasformata di Fourier con finestra e trasformata wavelet

I. Di cosa parleremo....

1. qualche richiamo sugli spazi di Hilbert...
2. ...e su alcune basi o.n. di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$
3. cosa fa e cosa **non** fa la trasformata di Fourier
4. trasformata di Fourier con finestra e trasformata wavelet
5. trasformata wavelet discreta

I. Di cosa parleremo....

1. qualche richiamo sugli spazi di Hilbert...
2. ...e su alcune basi o.n. di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$
3. cosa fa e cosa **non** fa la trasformata di Fourier
4. trasformata di Fourier con finestra e trasformata wavelet
5. trasformata wavelet discreta
6. Analisi di multi-risoluzione

II. Richiami sugli spazi di Hilbert

Prime definizioni:

II. Richiami sugli spazi di Hilbert

Prime definizioni:

Uno spazio vettoriale lineare (SVL) su $\mathbb{C}$ è un insieme $\mathcal{V}$ di vettori sul quale sono definite la somma tra due elementi di $\mathcal{V}$ e la moltiplicazione di un elemento di $\mathcal{V}$ per uno scalare di $\mathbb{C}$.

La somma $+$ gode delle seguenti proprietà:

1. commutativa: $v_1 + v_2 = v_2 + v_1, \ \forall\, v_1, v_2 \in \mathcal{V}$;
2. associativa: $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3, \forall\, v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{V}$;
3. esistenza dell'elemento neutro rispetto alla somma: $\exists\, 0 \in \mathcal{V},\ v + 0 = v,\ \forall\, v \in \mathcal{V}$;
4. esistenza dell'opposto: $\forall\, v \in \mathcal{V}\ \exists\,(-v) \in \mathcal{V}$ per cui $v + (-v) = 0$.

Il prodotto di un vettore per uno scalare gode invece delle seguenti proprietà:

1. prima proprietà distribuitiva: $\forall\,\alpha \in \mathbb{C}$ e $\forall\, v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ risulta $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$;
2. seconda proprietà distribuitiva: $\forall\,\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $\forall\, v \in \mathcal{V}$, $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;
3. associativa: $\forall\,\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $\forall\, v \in \mathcal{V}$, $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;
4. esistenza dell'elemento neutro: $\exists\, 1 \in \mathbb{C} : \forall\, v \in \mathcal{V}$ risulta $1\, v = v$.

Prodotto scalare:

Prodotto scalare:

Sia $\mathcal{H}$ uno SVL dotato di una mappa $<,>: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $< v, w > = \overline{< w, v >}, \quad \forall v, w \in \mathcal{H};$
2. $< v, \alpha w + \beta z > = \alpha < v, w > + \beta < v, z >, \forall v, w, z \in \mathcal{H}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C};$
3. $< v, v > \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{H}$ e risulta $< v, v > = 0 \iff v = 0.$

$<,>$ è detto prodotto scalare in $\mathcal{H}$.

Home Page
Title Page
Page 5 of 49
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Prodotto scalare:

Sia $\mathcal{H}$ uno SVL dotato di una mappa $<,>: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $< v, w > = \overline{< w, v >}, \quad \forall v, w \in \mathcal{H}$;
2. $< v, \alpha w + \beta z > = \alpha < v, w > + \beta < v, z >$, $\forall v, w, z \in \mathcal{H}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
3. $< v, v > \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{H}$ e risulta $< v, v > = 0 \iff v = 0$.

$<,>$ è detto prodotto scalare in $\mathcal{H}$.
Esso consente poi di definire una mappa da $\mathcal{H}$ in $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ che è una **norma** tramite la

$$\|v\| := \sqrt{< v, v >}.$$

La norma soddisfa le seguenti proprietà:

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Go Back
Full Screen
Close
Quit

1. disuguaglianza triangolare: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, $\forall v, w \in \mathcal{V}$;

2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ e $\forall v \in \mathcal{V}$;

3. $\|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$.

1. disuguaglianza triangolare: $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$, $\forall v, w \in \mathcal{V}$;
2. $||\alpha v|| = |\alpha| ||v||$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ e $\forall v \in \mathcal{V}$;
3. $||v|| = 0$ se e solo se $v = 0$.

Esempi

Un primo esempio è $||f||_1 := \int_{\mathcal{D}} |f(x)|\, dx$ $\mathcal{D}$ essendo un insieme L-misurabile.

1. disuguaglianza triangolare: $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|, \forall v, w \in \mathcal{V}$;
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|, \forall \alpha \in \mathbb{C}$ e $\forall v \in \mathcal{V}$;
3. $\|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$.

Esempi

Un primo esempio è $\|f\|_1 := \int_{\mathcal{D}} |f(x)|\, dx$ $\mathcal{D}$ essendo un insieme L-misurabile.
Un altro esempio è $\|f\|_2 := \sqrt{\int_{\mathcal{D}} |f(x)|^2\, dx}$ che è una norma in $\mathcal{L}^2(\mathcal{D})$ e proviene dal prodotto scalare

$$< f, g >= \int_{\mathcal{D}} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx.$$

Le norme sopra introdotte si riferiscono ai seguenti insiemi di funzioni:

$$\mathcal{L}^1(\mathcal{D}) = \left\{ f(x) \text{ L-mis } : \|f\|_1 := \int_{\mathcal{D},[L]} |f(x)|\, dx < \infty \right\},$$

i cui elementi sono spesso detti **funzioni integrabili**, ed

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{D}) = \left\{ f(x) \text{ L-mis } : \|f\|_2 := \sqrt{\int_{\mathcal{D},[L]} |f(x)|^2 \, dx} < \infty \right\},$$

i cui elementi sono le cosiddette **funzioni a quadrato integrabili**.

ed

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{D}) = \left\{ f(x) \text{ L-mis } : \|f\|_2 := \sqrt{\int_{\mathcal{D},[L]} |f(x)|^2 \, dx} < \infty \right\},$$

i cui elementi sono le cosiddette **funzioni a quadrato integrabili**.

$\mathcal{H}$ è detto uno **spazio di Hilbert** se risulta completo rispetto a tale norma. Nell'esempio precedente $\mathcal{L}^2(\mathcal{D})$ è uno spazio di Hilbert mentre $\mathcal{L}^1(\mathcal{D})$ è solamente uno spazio di Banach (non vale l'uguaglianza del parallelogramma).

III. sistemi o.n. e completi

Un insieme

$$\mathcal{F} = \{\varphi_n(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N},\ t.c.\ < \varphi_i, \varphi_j >= \delta_{ij}\}$$

è un insieme di vettori di uno spazio di Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ mutualmente ortonormali. I vettori di $\mathcal{F}$, quindi, sono l.i.. Potrebbero non essere, tuttavia, un s.g.

III. sistemi o.n. e completi

Un insieme

$$\mathcal{F} = \{\varphi_n(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N},\ t.c. < \varphi_i, \varphi_j >= \delta_{ij}\}$$

è un insieme di vettori di uno spazio di Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ mutualmente ortonormali. I vettori di $\mathcal{F}$, quindi, sono l.i.. Potrebbero non essere, tuttavia, un s.g.

Completezza: in generale, dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ ed un insieme di vettori $\mathcal{F}$ o.n., esso è detto **completo** (o totale) in $\mathcal{H}$ se l'unico vettore di $\mathcal{H}$ ortogonale a tutti i vettori di $\mathcal{F}$ è il vettore nullo. In formule, $\mathcal{F}$ è completo se

$$< \varphi_i, f >= 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0. \qquad (1)$$

III. sistemi o.n. e completi

Un insieme

$$\mathcal{F} = \{\varphi_n(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N},\ t.c.\ <\varphi_i, \varphi_j> = \delta_{ij}\}$$

è un insieme di vettori di uno spazio di Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ mutualmente ortonormali. I vettori di $\mathcal{F}$, quindi, sono l.i.. Potrebbero non essere, tuttavia, un s.g.

Completezza: in generale, dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ ed un insieme di vettori $\mathcal{F}$ o.n., esso è detto **completo** (o totale) in $\mathcal{H}$ se l'unico vettore di $\mathcal{H}$ ortogonale a tutti i vettori di $\mathcal{F}$ è il vettore nullo. In formule, $\mathcal{F}$ è completo se

$$<\varphi_i, f> = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0. \qquad (1)$$

La completezza estende, per spazi a dimensione infinita, il concetto di base. Vale infatti il seguente risultato:

Sia dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ ed $\mathcal{F}$ come sopra. $\mathcal{F}$ è completo in $\mathcal{H}$ se e solo se vale ciascuna delle seguenti proprietà, tutte equivalenti:

Sia dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ ed $\mathcal{F}$ come sopra. $\mathcal{F}$ è completo in $\mathcal{H}$ se e solo se vale ciascuna delle seguenti proprietà, tutte equivalenti:

1. $\forall f \in \mathcal{H}$ risulta

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} < \varphi_i, f > \varphi_i;$$

Sia dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ ed $\mathcal{F}$ come sopra. $\mathcal{F}$ è completo in $\mathcal{H}$ se e solo se vale ciascuna delle seguenti proprietà, tutte equivalenti:

1. $\forall f \in \mathcal{H}$ risulta

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} < \varphi_i, f > \varphi_i;$$

2. $\forall f, g \in \mathcal{H}$ risulta

$$< f, g >= \sum_{i=1}^{\infty} < f, \varphi_i >< \varphi_i, g >;$$

Sia dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ ed $\mathcal{F}$ come sopra. $\mathcal{F}$ è completo in $\mathcal{H}$ se e solo se vale ciascuna delle seguenti proprietà, tutte equivalenti:

1. $\forall f \in \mathcal{H}$ risulta
$$f = \sum_{i=1}^{\infty} < \varphi_i, f > \varphi_i;$$

2. $\forall f, g \in \mathcal{H}$ risulta
$$< f, g > = \sum_{i=1}^{\infty} < f, \varphi_i > < \varphi_i, g >;$$

3. $\forall f \in \mathcal{H}$ risulta
$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} | < \varphi_i, f > |^2.$$

Quest'ultima è nota come uguaglianza di Parceval.

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 9 of 49
Go Back
Full Screen
Close
Quit

La seconda uguaglianza può essere scritta formalmente nel modo seguente:

$$\forall f, g \in \mathcal{H} < f, g >=< f, \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i >< \varphi_i| \right), g >,$$

che suggerisce l'identificazione seguente:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i >< \varphi_i| = 1\!\!1,$$

in cui $1\!\!1$ è l'operatore identità, ovvero l'operatore (i.e. la mappa lineare da $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}$) che, agendo sul vettore arbitrario $h \in \mathcal{H}$, restituisce h stesso.

La seconda uguaglianza può essere scritta formalmente nel modo seguente:

$$\forall f, g \in \mathcal{H} < f, g > = < f, \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i >< \varphi_i| \right), g >,$$

che suggerisce l'identificazione seguente:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i >< \varphi_i| = \mathbb{1},$$

in cui $\mathbb{1}$ è l'operatore identità, ovvero l'operatore (i.e. la mappa lineare da $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}$) che, agendo sul vettore arbitrario $h \in \mathcal{H}$, restituisce h stesso.

Una simile formula è detta una **risoluzione dell'identità**: ogni sistema di generatori ne produce necessariamente una e viceversa.

Esempi di insiemi completi

Sia $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ ed

$$\mathcal{F} = \left\{ \varphi_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Questo insieme riveste un'importanza notevole nello studio delle serie e delle trasformate di Fourier, ed è o.n. e completo in $\mathcal{H}$.

Esempi di insiemi completi

Sia $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ ed

$$\mathcal{F} = \left\{ \varphi_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Questo insieme riveste un'importanza notevole nello studio delle serie e delle trasformate di Fourier, ed è o.n. e completo in $\mathcal{H}$.

Sia nuovamente $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ ed

$$\mathcal{F} = \left\{ \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \varphi_{2n-1}(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}},\ \varphi_{2n}(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Anche questo insieme è o.n. e completo in $\mathcal{H}$.

Sia $\mathcal{D} = [-1, 1]$. La procedura di Gram-Schmidt produce, in questo caso, i polinomi di Legendre $P_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, definiti dalla

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\sqrt{n + \frac{1}{2}}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n. \tag{2}$$

Le funzioni $P_n(x)$ sono ovviamente dei polinomi, sono o.n. e completi in $\mathcal{L}^2(-1, 1)$.

Sia $\mathcal{D} = [-1, 1]$. La procedura di Gram-Schmidt produce, in questo caso, i polinomi di Legendre $P_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, definiti dalla

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\sqrt{n+\frac{1}{2}}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \qquad (2)$$

Le funzioni $P_n(x)$ sono ovviamente dei polinomi, sono o.n. e completi in $\mathcal{L}^2(-1, 1)$.

Sia infine $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. In questo caso è evidente che occorre estendere leggermente quanto fatto in precedenza. È necessario infatti considerare spazi $\mathcal{L}^2$ con **misura** $e^{-x^2}\,dx$, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}\,dx)$ e la procedura di Gram-Schmidt produce i polinomi di Hermite $H_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, definiti dalla

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\,2^n\sqrt{\pi}}}\,e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \qquad (3)$$

che sono un sistema o.n. e completo in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}\,dx)$.

Domanda: è necessario che $\mathcal{F}$ sia completo (nel senso introdotto in precedenza) perché risulti un s.g.?

Domanda: è necessario che $\mathcal{F}$ sia completo (nel senso introdotto in precedenza) perché risulti un s.g.?

Risposta: no! è sufficiente che $\mathcal{F}$ sia un (A, B)-frame!

Domanda: è necessario che $\mathcal{F}$ sia completo (nel senso introdotto in precedenza) perché risulti un s.g.?
Risposta: no! è sufficiente che $\mathcal{F}$ sia un (A, B)-frame!

Definizione: una famiglia $\mathcal{F} = \{\varphi_j \in \mathcal{H},\ j \in \mathbb{N}\}$ è un $(A, B)-$**frame** se, per ogni $f \in \mathcal{H}$, risulta

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} | < \varphi_j, f > |^2 \leq B\|f\|^2.$$

In particolare, se $A = B$, il frame è detto **tight**, e risulta

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} | < \varphi_j, f > |^2 = A\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Domanda: è necessario che $\mathcal{F}$ sia completo (nel senso introdotto in precedenza) perché risulti un s.g.?
Risposta: no! è sufficiente che $\mathcal{F}$ sia un (A, B)-frame!

Definizione: una famiglia $\mathcal{F} = \{\varphi_j \in \mathcal{H}, j \in \mathbb{N}\}$ è un $(A, B)-$**frame** se, per ogni $f \in \mathcal{H}$, risulta

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} |<\varphi_j, f>|^2 \leq B\|f\|^2.$$

In particolare, se $A = B$, il frame è detto **tight**, e risulta

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |<\varphi_j, f>|^2 = A\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Ogni base o.n. è un $(1, 1)$-frame. Viceversa, un $(1, 1)$-frame è una base o.n. di $\mathcal{H}$ solo se ogni suo vettore è normalizzato!

Ogni (A, B)−frame produce una (anzi, infinite!) risoluzioni dell'identità, ed è quindi un s.g.

Ogni (A, B)−frame produce una (anzi, infinite!) risoluzioni dell'identità, ed è quindi un s.g.

Ad esempio, se $\mathcal{F}$ è un (A, A)-frame, esso produce la seguente risoluzione dell'identità:

$$\frac{1}{A}\sum_{j\in\mathbb{N}}|\varphi_j><\varphi_j| = \mathbb{1}$$

e quindi ogni vettore $f \in \mathcal{H}$ può scriversi come

$$f = \frac{1}{A}\sum_{j\in\mathbb{N}} <\varphi_j, f> \varphi_j$$

Ogni $(A, B)-$frame produce una (anzi, infinite!) risoluzioni dell'identità, ed è quindi un s.g.

Ad esempio, se $\mathcal{F}$ è un (A, A)-frame, esso produce la seguente risoluzione dell'identità:

$$\frac{1}{A}\sum_{j\in\mathbb{N}} |\varphi_j >< \varphi_j| = 1\!\!1$$

e quindi ogni vettore $f \in \mathcal{H}$ può scriversi come

$$f = \frac{1}{A}\sum_{j\in\mathbb{N}} < \varphi_j, f > \ \varphi_j$$

Se $\mathcal{F}$ è un (A, B)-frame, $A \neq B$, si ha nuovamente

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j \, \varphi_j,$$

ma i coefficenti hanno un'espressione più complicata:

$$c_j =< \tilde{\varphi}_j, f >,$$

in cui $\{\tilde{\varphi}_j\}$ è il frame duale di $\mathcal{F}$ (ed è costruito partendo da $\mathcal{F}$).

IV. trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier di una funzione $f(x)$ di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ è una trasformazione integrale definita tramite la

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx$$

L'antitrasformata è poi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) e^{ipx} dp$$

Essa può essere introdotta anche in altri spazi ma si perde la simmetria che si osserva in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ed in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e che è espressa dal teorema di Plancherel:

Teorema di Plancherel La trasformata di Fourier $\hat{f}(p)$ di una funzione $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ è anch'essa in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Inoltre la sua antitrasformata restituisce q.o. la $f(x)$ stessa.

Valgono inoltre l'uguaglianza di Parceval

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(p)|^2 dp$$

e l'uguaglianza di Parceval generalizzata

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(p)} \hat{g}(p) dp.$$

V. wavelets: una prima introduzione

La trasformata di Fourier non gode di alcuna proprietà di localizzazione, nel senso che $\hat{f}(p)$ può essere ottenuta unicamente qualora sia nota la $f(x)$ q.o. in $\mathbb{R}$. A volte, però, ciò che si conosce (sperimentalmente) è solo il comportamento locale della $f(x)$, ovvero ad esempio il suo comportamento su un intervallo o su più intervalli di misura finita.

V. wavelets: una prima introduzione

La trasformata di Fourier non gode di alcuna proprietà di localizzazione, nel senso che $\hat{f}(p)$ può essere ottenuta unicamente qualora sia nota la $f(x)$ q.o. in $\mathbb{R}$.
A volte, però, ciò che si conosce (sperimentalmente) è solo il comportamento locale della $f(x)$, ovvero ad esempio il suo comportamento su un intervallo o su più intervalli di misura finita.
Un modo per dedurre le proprietà locali della funzione che si vuole analizzare consiste nell'introdurre una funzione finestra, $g(x)$, e nel definire la trasformata di Fourier con finestra della funzione $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ nel modo seguente:

$$\left(T^{win} f\right)(p, y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x - y)\, e^{-ipx}\, dx,$$

che si riduce alla trasformata di Fourier standard qualora $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Se, invece, $g(x)$ è una funzione a supporto compatto in un certo intervallo $[a, b]$, $g(x-y)$ avrà supporto in $[a+y, b+y]$: l'integrale sopra si riduce, per y fissato, all'integrale $\int_{a+y}^{b+y} f(x)g(x-y)\, e^{-ipx}\, dx$. Il comportamento della $f(x)$ per $x \notin [a+y, b+y]$ è assolutamente ininfluente!

Se, invece, $g(x)$ è una funzione a supporto compatto in un certo intervallo $[a, b]$, $g(x - y)$ avrà supporto in $[a + y, b + y]$: l'integrale sopra si riduce, per y fissato, all'integrale $\int_{a+y}^{b+y} f(x)g(x - y)\, e^{-ipx}\, dx$. Il comportamento della $f(x)$ per $x \notin [a + y, b + y]$ è assolutamente ininfluente!

Il risultato di tale procedura dipende dal valore del parametro y, che determina la localizzazione della finestra introdotta tramite la $g(x)$. È poi opportuno osservare anche che, introducendo una funzione $g^{p,y}(x) := g(x-y)\, e^{ipx}$, ed assumendo per semplicità che la funzione $g(x)$ sia reale, possiamo scrivere

$$\left(T^{win} f\right)(p, y) =< g^{p,y}, f >= \int_{\mathbb{R}} \overline{g^{p,y}(x)}\, f(x)\, dx,$$

che è certamente ben definita $\forall f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, qualora, ad esempio, $g(x)$ sia scelta in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, poiché in questo caso anche $g^{p,y}(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

La definizione di T^{win} è dunque estremamente meno elaborata di quella della trasformata di Fourier in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

$\leadsto$ File "trasformataconfinestra.nb"

La definizione di T^{win} è dunque estremamente meno elaborata di quella della trasformata di Fourier in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

$\rightsquigarrow$ File "trasformataconfinestra.nb"

La T^{win}, sebbene consenta di evitare di considerare contributi provenienti da zone del supporto della $f(x)$ che non interessano, non riesce a zoomare nella regione di interesse: il grafico della funzione $g(x-y)$ è identico a quello della $g(x)$, a meno di una traslazione di y. Potrebbe essere utile, in certe situazioni, cercare di osservare più da vicino il comportamento della funzione $f(x)$ per determinati valori di x e per i relativi intorni.

Ad esempio, nell'analisi di un processo dinamico, è molto più interessante analizzare il transiente, che dura pochissimo, piuttosto che la situazione stazionaria che si genera dopo il transiente. Più in astratto il comportamento di una funzione vicino ad una singolarità essenziale è certamente più interessante del comportamento della stessa funzione nell'intorno di un punto in cui essa è, ad esempio, continua.

Ad esempio, nell'analisi di un processo dinamico, è molto più interessante analizzare il transiente, che dura pochissimo, piuttosto che la situazione stazionaria che si genera dopo il transiente. Più in astratto il comportamento di una funzione vicino ad una singolarità essenziale è certamente più interessante del comportamento della stessa funzione nell'intorno di un punto in cui essa è, ad esempio, continua.

Occorre costruire una lente di ingrandimento per analizzare queste situazioni, e la lente di ingrandimento è la trasformata wavelet: sia $\psi(x)$ una funzione di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, normalizzata in $\mathcal{L}^2$, $||\psi|| = 1$ e che deve essere assunta a media nulla: $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 0$. Siano poi a e b due parametri reali, con $a \neq 0$, e poniamo

$$\psi^{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\, \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Ovviamente $||\psi^{a,b}|| = 1$.

La funzione $\psi(x)$ è nota come **mother wavelet**.

La funzione $\psi^{(a,b)}$ può essere utilizzata per definire la trasformata wavelet in analogia a quanto per T^{win}: data una $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ si pone

$$(T^{wav} f)(a,b) =< \psi^{a,b}, f >= \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi^{a,b}(x)}\, f(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\, f(x)\, dx,$$

Poiché tanto $f(x)$ quanto $\psi^{a,b}(x)$ sono in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ne segue che $(T^{wav} f)(a,b)$ è ben definita per ogni $(a,b) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R}) =: \mathfrak{A}$: ancora una volta la definizione della trasformata è decisamente più immediata della definizione della trasformata di Fourier in $\mathcal{L}^2$!

Problema 1.: Il teorema di Plancherel mostra come ritrovare la funzione $f(x)$ partendo dalla sua trasformata di Fourier $\hat{f}(p)$, qualora sia $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Quesiti analoghi possiamo porci anche per T^{wav} e T^{win}. Come mostreremo nel seguito sarà possibile definire degli operatori inversi, $(T^{wav})^{-1}$ e $(T^{win})^{-1}$, e sarà quindi possibile riottenere in entrambi i casi, procedendo opportunamente, la $f(x)$ da cui si è partiti.

Problema 1.: Il teorema di Plancherel mostra come ritrovare la funzione $f(x)$ partendo dalla sua trasformata di Fourier $\hat{f}(p)$, qualora sia $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Quesiti analoghi possiamo porci anche per T^{wav} e T^{win}. Come mostreremo nel seguito sarà possibile definire degli operatori inversi, $(T^{wav})^{-1}$ e $(T^{win})^{-1}$, e sarà quindi possibile riottenere in entrambi i casi, procedendo opportunamente, la $f(x)$ da cui si è partiti.

Problema 2.: Mostreremo poi come sia possibile costruire un sottoinsieme numerabile $\mathcal{G}_{dis}$ dell'insieme continuo ed overcompleto $\mathcal{G} = \{\psi^{a,b}(x), (a, b) \in \mathfrak{A}\}$ che risulti anch'esso completo in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

VI. trasformata wavelet continua

Sia $\psi(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ una qualsiasi funzione a quadrato integrabile e media nulla e normalizzata ad uno:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2\, dx = 1,$$

e definiamo, al solito, $\psi^{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ e

$$(T^{wav} f)(a,b) = < \psi^{a,b}, f > = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi^{a,b}(x)}\, f(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\, f(x)\, dx,$$

Si verifica che $\|\psi^{a,b}\| = 1$ per ogni $(a,b) \in \mathfrak{A}$ e che

$$\lim_{(a,b)\to(a_0,b_0)} \|\psi^{a,b} - \psi^{a_0,b_0}\| = 0.$$

La risposta al Problema 1 discusso in precedenza (esistenza di $(T^{wav})^{-1}$) è fornita dal seguente teorema:

La risposta al Problema 1 discusso in precedenza (esistenza di $(T^{wav})^{-1}$) è fornita dal seguente teorema:

Sia $\psi(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tale che la seguente condizione di ammissibilità sia soddisfatta:

$$c_\psi := 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(p)|^2}{|p|} \, dp < \infty.$$

Allora, per ogni $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, si ha

$$\frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \overline{(T^{wav} f)(a,b)} \, (T^{wav} g)(a,b) \, \frac{da\, db}{a^2} = < f, g >$$

La risposta al Problema 1 discusso in precedenza (esistenza di $(T^{wav})^{-1}$) è fornita dal seguente teorema:

Sia $\psi(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tale che la seguente condizione di ammissibilità sia soddisfatta:

$$c_\psi := 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(p)|^2}{|p|} dp < \infty.$$

Allora, per ogni $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, si ha

$$\frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \overline{(T^{wav} f)(a,b)}\, (T^{wav} g)(a,b) \frac{da\, db}{a^2} = < f, g >$$

Questa equazione assomiglia alla $< f, g > = < \hat{f}, \hat{g} >$, che stabilisce come il risultato del prodotto scalare di due funzioni di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ sia indipendente dal fatto che si adoperi la rappresentazione delle coordinate o quella dei momenti. Infatti possiamo riscriverla come

$$\frac{1}{c_\psi} < T^{wav} f, T^{wav} g > = < f, g >, \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}),$$

in cui il prodotto scalare a destra è quello solito in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ mentre quello a sinistra è quello nello spazio di Hilbert $\mathcal{L}^2\left(\mathbb{R}^2, \frac{da\,db}{a^2}\right)$.

in cui il prodotto scalare a destra è quello solito in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ mentre quello a sinistra è quello nello spazio di Hilbert $\mathcal{L}^2\left(\mathbb{R}^2, \frac{da\,db}{a^2}\right)$.

Se $f = g$ si ottiene la

$$\frac{1}{c_\psi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left|\left(T^{wav}f\right)(a,b)\right|^2 \frac{da\,db}{a^2} =< f, f >= \|f\|^2,$$

che mostra come la mappa T^{wav} sia una isometria da $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ in $\mathcal{L}^2\left(\mathbb{R}^2, \frac{da\,db}{c_\psi a^2}\right)$.

in cui il prodotto scalare a destra è quello solito in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ mentre quello a sinistra è quello nello spazio di Hilbert $\mathcal{L}^2\left(\mathbb{R}^2, \frac{da\,db}{a^2}\right)$.

Se $f = g$ si ottiene la

$$\frac{1}{C_\psi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |(T^{wav}f)(a,b)|^2\,\frac{da\,db}{a^2} =< f, f >= \|f\|^2,$$

che mostra come la mappa T^{wav} sia una isometria da $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ in $\mathcal{L}^2\left(\mathbb{R}^2, \frac{da\,db}{C_\psi a^2}\right)$.

Inoltre, poiché $(T^{wav}f)(a,b) =< \psi^{a,b}, f >$, si ottiene

$$\frac{1}{C_\psi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} < f, \psi^{a,b} >< \psi^{a,b}, g > \frac{da\,db}{a^2} =< f, g >,$$

$\forall f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, che fornisce immediatamente la seguente risoluzione dell'identità

$$\frac{1}{C_\psi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\psi^{a,b} >< \psi^{a,b}|\,\frac{da\,db}{a^2} = \mathbb{1}$$

Quindi, ad ogni funzione $\psi(x)$ soddisfacente la condizione di ammissibilità, è associata una decomposizione dell'identità.

Quindi, ad ogni funzione $\psi(x)$ soddisfacente la condizione di ammissibilità, è associata una decomposizione dell'identità.

L'esistenza di una decomposizione dell'identità è di fondamentale importanza per potere dedurre che esiste $T^{wav^{-1}}$, infatti:

$$f(x) = < \xi_x, f > = < \xi_x, \mathbb{1} f > = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{da\, db}{a^2} < \psi^{a,b}, f > \psi^{a,b}(x) =$$

$$= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{da\, db}{a^2} (T^{wav} f)(a,b)\, \psi^{a,b}(x),$$

che mostra come la $f(x)$ possa essere ricostruita a partire dalla sua trasformata $(T^{wav} f)(a,b)$.

Risultati molto simili possono ottenersi per la trasformata T^{win} e non li ripeteremo qui.

VII. trasformata wavelet discreta

Il problema che si vuole qui discutere è il seguente:

è possibile dall'insieme $\{\psi^{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\}$ estrarre un sottoinsime

$$\{\psi_{m,n}(x)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{a_0^m}}\psi\left(\frac{x - nb_0a_0^m}{a_0^m}\right)\right\} = \left\{a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}x - nb_0)\right\}$$

tale che

VII. trasformata wavelet discreta

Il problema che si vuole qui discutere è il seguente:

è possibile dall'insieme $\{\psi^{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\}$ estrarre un sottoinsime

$$\{\psi_{m,n}(x)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{a_0^m}}\psi\left(\frac{x - nb_0a_0^m}{a_0^m}\right)\right\} = \left\{a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}x - nb_0)\right\}$$

tale che

1. l'insieme $\{\psi_{m,n}(x),\ m,n \in \mathbb{Z}\}$ produca una risoluzione dell'identità, in modo che ogni $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ possa essere espressa, in modo eventualmente non unico, come combinazione lineare delle $\psi_{m,n}(x)$;

VII. trasformata wavelet discreta

Il problema che si vuole qui discutere è il seguente:

è possibile dall'insieme $\{\psi^{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\}$ estrarre un sottoinsime

$$\{\psi_{m,n}(x)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{a_0^m}}\psi\left(\frac{x - nb_0a_0^m}{a_0^m}\right)\right\} = \left\{a_0^{-m/2}\,\psi(a_0^{-m}\,x - nb_0)\right\}$$

tale che

1. l'insieme $\{\psi_{m,n}(x),\ m, n \in \mathbb{Z}\}$ produca una risoluzione dell'identità, in modo che ogni $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ possa essere espressa, in modo eventualmente non unico, come combinazione lineare delle $\psi_{m,n}(x)$;

2. tale procedura di ricostruzione risulti numericamente stabile, ovvero che due funzioni $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ammettano espansioni tanto più simili tra loro quanto più simili sono le funzioni stesse.

Ovviamente è da attendersi che un ruolo cruciale nella ricostruzione di una funzione data $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ sia giocato dai coefficienti $< \psi_{m,n}, f >$. Richiedere che tali coefficienti caratterizzino la $f(x)$ equivale a dire che a coefficienti uguali debba corrispondere una stessa funzione:

$$\text{se} \quad < \psi_{m,n}, f_1 > = < \psi_{m,n}, f_2 >, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$f_1(x) = f_2(x) \text{ q.o. in } \mathbb{R},$$

ovvero, equivalentemente,

$$\text{se} \quad < \psi_{m,n}, f > = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$f(x) = 0 \text{ q.o. in } \mathbb{R}.$$

Ovviamente è da attendersi che un ruolo cruciale nella ricostruzione di una funzione data $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ sia giocato dai coefficienti $< \psi_{m,n}, f >$. Richiedere che tali coefficienti caratterizzino la $f(x)$ equivale a dire che a coefficienti uguali debba corrispondere una stessa funzione:

$$\text{se } < \psi_{m,n}, f_1 >=< \psi_{m,n}, f_2 >, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$f_1(x) = f_2(x) \text{ q.o. in } \mathbb{R},$$

ovvero, equivalentemente,

$$\text{se } < \psi_{m,n}, f >= 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$f(x) = 0 \text{ q.o. in } \mathbb{R}.$$

La stabilità numerica è anch'essa connessa a tali coefficienti: nel caso in cui risulti $< \psi_{m,n}, f_1 > \simeq < \psi_{m,n}, f_2 >$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, si vuole che si abbia $f_1(x) \simeq f_2(x)$, ovvero che $\|f_1 - f_2\| \simeq 0$.

Questa richiesta è automaticamente soddisfatta nel caso in cui la funzioni $\psi_{m,n}$ formino una base o.n., in quanto, in questo caso, risulta:

$$f_1(x) - f_2(x) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} < \psi_{m,n}, f_1 - f_2 > \psi_{m,n}(x),$$

per cui

$$\|f_1 - f_2\|^2 = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} | < \psi_{m,n}, f_1 - f_2 > |^2,$$

che mostra proprio come $\|f_1 - f_2\|$ possa essere piccolo solo quando sia prossima a zero la differenza $| < \psi_{m,n}, f_1 > - < \psi_{m,n}, f_2 > |$, differenza che, inoltre, deve anche appartenere ad $l^2(\mathbb{Z}^2)$.

Per potere giungere alle stesse conclusioni anche nel caso in cui i vettori $\psi_{m,n}$ non formino una base o.n. basta richiedere che esista una costante $A > 0$ per cui valga la

$$A||f||^2 \leq \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} | < \psi_{m,n}, f > |^2,$$

per ogni $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, che è esattamente **metà** della definizione cui deve soddisfare l'insieme $\{\psi_{m,n}(x),\ m, n \in \mathbb{Z}\}$ perché esso sia un $(A, B)-$frame.

Per potere giungere alle stesse conclusioni anche nel caso in cui i vettori $\psi_{m,n}$ non formino una base o.n. basta richiedere che esista una costante $A > 0$ per cui valga la

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |<\psi_{m,n}, f>|^2,$$

per ogni $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, che è esattamente **metà** della definizione cui deve soddisfare l'insieme $\{\psi_{m,n}(x),\ m,n \in \mathbb{Z}\}$ perché esso sia un $(A, B)-$frame.

Infatti se vale questa allora $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, risulti

$$\|f_1 - f_2\|^2 \leq \frac{1}{A} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |<\psi_{m,n}, f_1 - f_2>|^2,$$

condizione che, ancora una volta, consente di concludere che quanto più piccolo è $|<\psi_{m,n}, f_1 - f_2>|$ tanto più piccolo è $\|f_1 - f_2\|$.

D'altra parte, affinché quanto facciamo abbia un senso, è opportuno che per ogni $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ si abbia $<\psi_{m,n}, f> \in {}^2(\mathbb{Z}^2)$, cioè che sia $\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |<\psi_{m,n}, f>|^2 < \infty$. Questa richiesta è certamente soddisfatta se vale l'altra **metà** della definizione di $(A, B)-$frame, ovvero quando si richieda che esista una seconda costante B, con $A \leq B < \infty$, per cui risulti

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |<\psi_{m,n}, f>|^2 \leq B\|f\|^2,$$

$\forall f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. In definitiva:

D'altra parte, affinché quanto facciamo abbia un senso, è opportuno che per ogni $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ si abbia $< \psi_{m,n}, f > \in {}^2(\mathbb{Z}^2)$, cioè che sia $\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} | < \psi_{m,n}, f > |^2 < \infty$. Questa richiesta è certamente soddisfatta se vale l'altra **metà** della definizione di $(A, B)-$frame, ovvero quando si richieda che esista una seconda costante B, con $A \leq B < \infty$, per cui risulti

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} | < \psi_{m,n}, f > |^2 \leq B\|f\|^2,$$

$\forall f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. In definitiva:
le richieste di stabilità numerica e di buona definizione dello sviluppo di ogni $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ in termini di $\{\psi_{m,n},\ m, n \in \mathbb{Z}\}$ suggerisce che questo insieme debba essere, se non una base o.n., almeno un $(A, B)-$frame.

Per finire, ricordiamo che ogni (A, B)—frame è un sistema di generatori. Questo vuol dire che se l'insieme

$$\{\psi_{m,n}(x),\ m, n \in \mathbb{Z}\}$$

che abbiamo estratto da

$$\{\psi_{a,b}(x),\ a, b \in \mathfrak{A}\}$$

è un simile frame, allora la risoluzione dell'identità è garantita e, con questa, la possibilità di ricostruire ogni funzione $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ in termini delle funzioni $\psi_{m,n}(x)$.

VIII. MRA

Concentreremo adesso la nostra attenzione al problema di costruire un insieme di vettori $\mathcal{W} = \{\psi_{m,n}(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}),\ m, n \in \mathbb{Z}\}$ che formino una base o.n. in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. In particolare la procedura che discuteremo, nota come analisi di multi-risoluzione, e nel seguito indicata con MRA, produrrà una mother wavelet $\psi(x)$ dalla quale, considerandone i traslati ed i dilatati, possa essere costruito immediatamente l'insieme $\mathcal{W}$.

VIII. MRA

Concentreremo adesso la nostra attenzione al problema di costruire un insieme di vettori $\mathcal{W} = \{\psi_{m,n}(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}),\ m,n \in \mathbb{Z}\}$ che formino una base o.n. in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. In particolare la procedura che discuteremo, nota come analisi di multi-risoluzione, e nel seguito indicata con MRA, produrrà una mother wavelet $\psi(x)$ dalla quale, considerandone i traslati ed i dilatati, possa essere costruito immediatamente l'insieme $\mathcal{W}$. In quanto segue fisseremo sempre $a_0 = 2$ e $b_0 = 1$, mentre $\psi(x)$ sarà la nostra incognita. Dunque abbiamo

$$\psi_{m,n}(x) = 2^{-m/2}\,\psi(2^{-m}x - n), \quad m,n \in \mathbb{Z}.$$

Lo strumento fondamentale per ottenere la mother wavelet è contenuto nella seguente definizione.

Una **MRA** di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ è una catena di sottospazi chiusi V_j di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ per cui risulta:

1. $\ldots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \ldots$
2. $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \qquad \cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
3. $f(.) \in V_j \Longleftrightarrow f(2^j.) \in V_0, \ \forall j \in \mathbb{Z}$
4. $f(.) \in V_0 \Longleftrightarrow f(.-n) \in V_0, \ \forall n \in \mathbb{Z}$
5. $\exists \Phi(x) \in V_0$ tale che $\{\Phi(x-n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ è una base o.n. di V_0.

Una **MRA** di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ è una catena di sottospazi chiusi V_j di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ per cui risulta:

1. $\ldots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \ldots$
2. $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \qquad \cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
3. $f(.) \in V_j \iff f(2^j.) \in V_0,\ \forall j \in \mathbb{Z}$
4. $f(.) \in V_0 \iff f(.-n) \in V_0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$
5. $\exists \Phi(x) \in V_0$ tale che $\{\Phi(x-n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ è una base o.n. di V_0.

La funzione $\Phi(x)$ è nota come scaling function.

Una **MRA** di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ è una catena di sottospazi chiusi V_j di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ per cui risulta:

1. $\ldots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \ldots$
2. $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \qquad \cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
3. $f(.) \in V_j \iff f(2^j .) \in V_0,\ \forall j \in \mathbb{Z}$
4. $f(.) \in V_0 \iff f(. - n) \in V_0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$
5. $\exists \Phi(x) \in V_0$ tale che $\{\Phi(x-n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ è una base o.n. di V_0.

La funzione $\Phi(x)$ è nota come scaling function.
La condizione 3. esplicita il legame richiesto ai vari spazi V_j: essi sono connessi tra loro da semplici dilatazioni di una qualche potenza intera di 2.

Una **MRA** di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ è una catena di sottospazi chiusi V_j di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ per cui risulta:

1. $\ldots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \ldots$
2. $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \qquad \cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
3. $f(.) \in V_j \Longleftrightarrow f(2^j .) \in V_0,\ \forall j \in \mathbb{Z}$
4. $f(.) \in V_0 \Longleftrightarrow f(. - n) \in V_0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$
5. $\exists \Phi(x) \in V_0$ tale che $\{\Phi(x-n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ è una base o.n. di V_0.

La funzione $\Phi(x)$ è nota come scaling function.
La condizione 3. esplicita il legame richiesto ai vari spazi V_j: essi sono connessi tra loro da semplici dilatazioni di una qualche potenza intera di 2.
La condizione 4., invece, mostra come i traslati interi di una funzione di V_0 continuino ad appartenere allo stesso spazio.

La prima delle condizioni 2. esprime il fatto che gli spazi V_j siano spazi di approssimazione di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, spazi che, in virtù della 1., approssimano tanto meglio $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ quanto più j decresce verso $-\infty$. Inoltre, l'unica funzione che appartiene a tutti gli spazi V_j è la funzione q.o. nulla.

Esempio della MRA di Haar

Sia

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1[, \\ 0, & \text{altrove}, \end{cases}$$

la funzione caratteristica dell'intervallo $[0,1[$. È chiaro che le funzioni dell'insieme $\{\Phi(x-n),\, n \in \mathbb{Z}\}$ sono mutualmente o.n. in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Sia quindi V_0 lo spazio generato da tali funzioni. Ovviamente gli spazi V_j sono ottenuti sfruttando la 3.: ad esempio la funzione

$$f_{-1}(x) := \Phi(2^1\, x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1/2[, \\ 0, & \text{altrove}, \end{cases}$$

appartiene a V_{-1}, mentre la

$$f_1(x) := \Phi(2^{-1}\, x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,2[, \\ 0, & \text{altrove}, \end{cases}$$

appartiene a V_1.

La catena di spazi si ritrova facilmente: ogni funzione costante a tratti in intervalli $[n, n+2[$, $n \in \mathbb{Z}$ risulta ovviamente costante a tratti in intervalli del tipo $[m, m+1[$, $m \in \mathbb{Z}$, nonché in intervalli del tipo $[l, l+1/2[$, $l \in \mathbb{Z}$. Quindi, in particolare, $V_1 \subset V_0 \subset V_{-1}$, ed è anche ovvio che l'inclusione è stretta.

La catena di spazi si ritrova facilmente: ogni funzione costante a tratti in intervalli $[n, n+2[$, $n \in \mathbb{Z}$ risulta ovviamente costante a tratti in intervalli del tipo $[m, m+1[$, $m \in \mathbb{Z}$, nonché in intervalli del tipo $[l, l+1/2[$, $l \in \mathbb{Z}$. Quindi, in particolare, $V_1 \subset V_0 \subset V_{-1}$, ed è anche ovvio che l'inclusione è stretta.

$\rightsquigarrow$ File "Haar.nb"

La catena di spazi si ritrova facilmente: ogni funzione costante a tratti in intervalli $[n, n+2[$, $n \in \mathbb{Z}$ risulta ovviamente costante a tratti in intervalli del tipo $[m, m+1[$, $m \in \mathbb{Z}$, nonché in intervalli del tipo $[l, l+1/2[$, $l \in \mathbb{Z}$. Quindi, in particolare, $V_1 \subset V_0 \subset V_{-1}$, ed è anche ovvio che l'inclusione è stretta.

$\rightsquigarrow$ File "Haar.nb"

$\rightsquigarrow$ File "Mexicanhat.nb"

Sia adesso W_j il complemento ortogonale di V_j in V_{j-1}:

$$W_j \oplus V_j = V_{j-1}.$$

Mentre due spazi V_j e V_k, $j \neq k$, non sono necessariamente ortogonali gli spazi W_j e W_k lo sono.
Osserviamo adesso che

$$V_0 = V_1 \oplus W_1 = (V_2 \oplus W_2) \oplus W_1 = V_2 \oplus (W_2 \oplus W_1) =$$

$$= V_3 \oplus (W_3 \oplus W_2 \oplus W_1) = \ldots = V_N \oplus \left(\oplus_{l=1}^{N} W_l\right), \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Sia adesso W_j il complemento ortogonale di V_j in V_{j-1}:

$$W_j \oplus V_j = V_{j-1}.$$

Mentre due spazi V_j e V_k, $j \neq k$, non sono necessariamente ortogonali gli spazi W_j e W_k lo sono.
Osserviamo adesso che

$$V_0 = V_1 \oplus W_1 = (V_2 \oplus W_2) \oplus W_1 = V_2 \oplus (W_2 \oplus W_1) =$$

$$= V_3 \oplus (W_3 \oplus W_2 \oplus W_1) = \ldots = V_N \oplus \left(\oplus_{l=1}^{N} W_l\right), \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, se fossimo partiti da V_j piuttosto che da V_0, avremmo ottenuto la seguente decomposizione ortogonale:

$$V_j = V_N \oplus \left(\oplus_{k=j+1}^{N} W_k\right) = V_N \oplus \left(\oplus_{l=1}^{N-j} W_{l+j}\right) \qquad \forall N \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Ricordando che $V_j \to \{0\}$ quando $j \to \infty$, e che $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j}$, se ne deduce che

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \overline{\oplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j},$$

Questa, rispetto alla $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j}$, ha il vantaggio di decomporre lo spazio $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ in sottospazi mutualmente ortogonali. Per questa ragione, supponendo di avere trovato una funzione $\psi(x) \in W_0$ tale che l'insieme $\{\psi_{0,n}(x) = \psi(x-n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ sia una base o.n. di W_0, si dimostra che l'insieme $\{\psi_{j,n}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x - n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ è una base o.n. di W_j, per ogni $j \in \mathbb{Z}$ e che quindi l'insieme

$$\mathcal{W} = \{\psi_{j,n}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x - n),\ j, n \in \mathbb{Z}\}$$

è una base o.n. di wavelets di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Questa, rispetto alla $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j}$, ha il vantaggio di decomporre lo spazio $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ in sottospazi mutualmente ortogonali. Per questa ragione, supponendo di avere trovato una funzione $\psi(x) \in W_0$ tale che l'insieme $\{\psi_{0,n}(x) = \psi(x-n),\, n \in \mathbb{Z}\}$ sia una base o.n. di W_0, si dimostra che l'insieme $\{\psi_{j,n}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x - n),\, n \in \mathbb{Z}\}$ è una base o.n. di W_j, per ogni $j \in \mathbb{Z}$ e che quindi l'insieme

$$\mathcal{W} = \{\psi_{j,n}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x - n),\, j, n \in \mathbb{Z}\}$$

è una base o.n. di wavelets di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Il problema che ancora dobbiamo risolvere è quindi quello di ricavare la funzione $\psi(x)$, la **mother wavelet** che genera interamente la base o.n.

La costruzione della mother wavelet è piuttosto lunga ma il risultato finale, ovvero la ricetta che consente di ottenere la $\psi(x)$, è relativamente semplice. Come vedremo l'ingrediente fondamentale della costruzione risulterà essere semplicemente la scaling function $\Phi(x)$, e la two-scale relation ad essa connessa:

La costruzione della mother wavelet è piuttosto lunga ma il risultato finale, ovvero la ricetta che consente di ottenere la $\psi(x)$, è relativamente semplice. Come vedremo l'ingrediente fondamentale della costruzione risulterà essere semplicemente la scaling function $\Phi(x)$, e la two-scale relation ad essa connessa:

poiché la scaling function $\Phi(x) \in V_0 \subset V_{-1}$, e poiché, così come $\{\Phi(x-n),\, n \in \mathbb{Z}\}$ è una base o.n. di V_0, $\{\Phi_{-1,n}(x) = \sqrt{2}\,\Phi(2x-n),\, n \in \mathbb{Z}\}$ è una base o.n. di V_{-1}, sarà possibile espandere in modo unico la $\Phi(x)$ come c.l. delle funzioni $\Phi_{-1,n}(x)$:

$$\Phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n\, \Phi_{-1,n}(x) = \sqrt{2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n\, \Phi(2x-n),$$

con

$$h_n = <\Phi_{-1,n}, \Phi> = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \overline{\Phi(2x-n)}\, \Phi(x)\, dx.$$

La TSR prende questo nome perché mette in relazione la stessa funzione, Φ, a due diverse scale.

Ovviamente vale l'uguaglianza di Parceval:

$$1 = \|\Phi\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |h_n|^2$$

Ovviamente vale l'uguaglianza di Parceval:

$$1 = \|\Phi\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |h_n|^2$$

La TSR assume una forma particolarmente interessante nello spazio delle trasformate di Fourier: introduciamo le funzioni

$$\hat{\Phi}(\omega) = F[\Phi](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(x)\, e^{-i\omega x}\, dx,$$

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n\, e^{-i\omega n}.$$

Fourier-trasformando la TSR otteniamo la

$$\hat{\Phi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\, \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Ovviamente vale l'uguaglianza di Parceval:

$$1 = \|\Phi\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2$$

La TSR assume una forma particolarmente interessante nello spazio delle trasformate di Fourier: introduciamo le funzioni

$$\hat{\Phi}(\omega) = F[\Phi](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(x)\, e^{-i\omega x}\, dx,$$

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n\, e^{-i\omega n}.$$

Fourier-trasformando la TSR otteniamo la

$$\hat{\Phi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\, \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Questa può essere facilmente iterata, visto che implica le $\hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = m_0\left(\frac{\omega}{4}\right)\, \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{4}\right)$ e così via, e produce quindi la scaling function, i coefficienti h_n della TSR e, come vedremo, la $\psi(x)$ di conseguenza.

Tralasciamo qui i dettagli della costruzione di $\psi(x)$, limitandoci a dare il risultato finale (che non è unico):

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^{m-1}\, \overline{h_{-m-1}}\, \Phi(2x - m)$$

e

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^{m}\, \overline{h_{-m+1}}\, \Phi(2x - m)$$

sono due possibili espressioni per la mother wavelet, e l'insieme $\psi_{m,n}(x)$ costruito a partire da questa funzione è o.n. e completo in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

ESEMPI

esempio 1

In questo caso la TSR diventa $\Phi(x) = c_0\,\Phi(2x) + c_1\,\Phi(2x-1)$ e le condizioni sui coefficienti diventano $c_0+c_1 = 2$, $c_0-c_1 = 0$, sistema che ammette un'unica soluzione: $c_0 = c_1 = 1$. Avremo quindi $\Phi(x) = \Phi(2x) + \Phi(2x-1)$. Trovare una soluzione di questa TSR è particolarmente semplice: la

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1[, \\ 0, & \text{altrove}, \end{cases}$$

in effetti, risolve la TSR, in quanto

$$\Phi(2x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1/2[, \\ 0, & \text{altrove}, \end{cases}$$

e

$$\Phi(2x-1) = \begin{cases} 1, & x \in [1/2,1[, \\ 0, & \text{altrove}. \end{cases}$$

Per ricavare la mother wavelet utilizziamo poi una delle formule fornite in precedenza

$$\psi(x) = c_1\Phi(2x) - c_0\Phi(2x-1) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}[, \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1[, \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

delle formule fornite in precedenza

$$\psi(x) = c_1\Phi(2x) - c_0\Phi(2x-1) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}[, \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1[, \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

Qui abbiamo mostrato come ricavare la scaling function e la mother wavelet noti che siano i coefficienti, (che qui sono fissati univocamente dalle richieste sugli integrali di $\Phi(x)$ e $\psi(x)$). Il problema simmetrico, quello di trovare i coefficienti nota che sia la $\Phi(x)$, è di fatto un problema banale: è sufficiente calcolare degli integrali! In questo caso, ad esempio, se $\Phi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$, abbiamo

$$h_n = \sqrt{2}\int_{\mathbb{R}} \overline{\Phi(2x-n)}\,\Phi(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & n = 0, 1, \\ 0, & n \neq 0, 1, \end{cases}$$

che possiamo riscrivere come $h_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{n,0} + \delta_{n,1})$.

esempio 2

Consideriamo la TSR $\Phi(x) = c_0\,\Phi(2x) + c_1\,\Phi(2x-1) + c_2\,\Phi(2x-2)$ i cui coefficenti devono soddisfare le $c_0 + c_1 + c_2 = 2$, $-c_0 + c_1 - c_2 = 0$. La soluzione di questo sistema non è più unica. La soluzione più simmetrica è la $c_0 = c_2 = \frac{1}{2}$, $c_1 = 1$, e corrispondentemente la TSR e l'espressione della mother wavelet diventano:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\,\Phi(2x) + \,\Phi(2x-1) + \frac{1}{2}\,\Phi(2x-2),$$

$$\psi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n\,c_{1-n}\,\Phi(2x-n) = -\frac{1}{2}\,\Phi(2x+1) + \Phi(2x) - \frac{1}{2}\,\Phi(2x-1).$$

esempio 2

Consideriamo la TSR $\Phi(x) = c_0\,\Phi(2x) + c_1\,\Phi(2x-1) + c_2\,\Phi(2x-2)$ i cui coefficenti devono soddisfare le $c_0 + c_1 + c_2 = 2$, $-c_0 + c_1 - c_2 = 0$. La soluzione di questo sistema non è più unica. La soluzione più simmetrica è la $c_0 = c_2 = \frac{1}{2}$, $c_1 = 1$, e corrispondentemente la TSR e l'espressione della mother wavelet diventano:

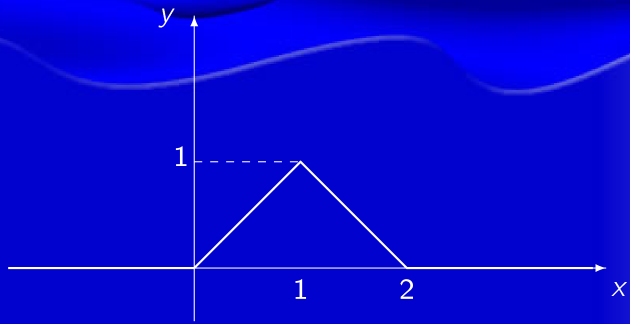
$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\,\Phi(2x) + \Phi(2x-1) + \frac{1}{2}\,\Phi(2x-2),$$

$$\psi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n\, c_{1-n}\,\Phi(2x-n) = -\frac{1}{2}\,\Phi(2x+1) + \Phi(2x) - \frac{1}{2}\,\Phi(2x-1).$$

La soluzione della TSR è la linear spline così definita:

$$\Phi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ 2-x, & x \in [1,2], \\ 0, & \text{altrove}, \end{cases}$$

il cui grafico è fornito in figura.



Tale risultato può essere generalizzato ottenendo funzioni a supporto compatto sempre più grande. Sono le splines di ordine superiore, e godono di una regolarità crescente col loro supporto.

Un ultimo esempio particolarmente utile nelle applicazioni nasce dalla scaling function nota in letteratura come la $D_4(x)$ di Daubechies.
I coefficienti della TSR sono

$$h_0 = \frac{\sqrt{2}}{8}(1+\sqrt{3}),\ h_1 = \frac{\sqrt{2}}{8}(3+\sqrt{3}),$$

$$h_2 = \frac{\sqrt{2}}{8}(3-\sqrt{3}),\ h_3 = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-\sqrt{3}),$$

e la mother wavelet $W_4(x)$ è ottenuta dalla

$$W_4(x) = \sqrt{2}\,(h_3\, D_4(2x+2) - h_2\, D_4(2x+1) +$$

$$+ h_1\, D_4(2x) - h_0\, D_4(2x-1)).$$

$\rightsquigarrow$ vedi "DaubechiesD4.pdf" e "DaubechiesD2.pdf"

Un ultimo esempio particolarmente utile nelle applicazioni nasce dalla scaling function nota in letteratura come la $D_4(x)$ di Daubechies.
I coefficienti della TSR sono

$$h_0 = \frac{\sqrt{2}}{8}(1+\sqrt{3}),\ h_1 = \frac{\sqrt{2}}{8}(3+\sqrt{3}),$$

$$h_2 = \frac{\sqrt{2}}{8}(3-\sqrt{3}),\ h_3 = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-\sqrt{3}),$$

e la mother wavelet $W_4(x)$ è ottenuta dalla

$$W_4(x) = \sqrt{2}\,(h_3\, D_4(2x+2) - h_2\, D_4(2x+1) +$$

$$+ h_1\, D_4(2x) - h_0\, D_4(2x-1)).$$

$\rightsquigarrow$ vedi "DaubechiesD4.pdf" e "DaubechiesD2.pdf"
Altri esempi sono le wavelet di Meyer $\rightsquigarrow$ vedi "Meyer.pdf" e wavelet di Shannon $\rightsquigarrow$ vedi "Shannon.pdf"

Per finire è opportuno citare il libro Wavelets in electromagnetics and device modelling, di G.W. Pan, ⇝ vedi "Waveletsetccopertina.pdf" in cui delle applicazioni concrete delle wavelet a sistemi elettronici sono discusse, ⇝ vedi "Waveletsetcindice.pdf".