Seminario Q.M.

1. Equazioni meccanica classica

$$\vec{F} = m\vec{a} \implies \vec{F}(\vec{OP}, \dot{\vec{OP}}; t) = m\,\ddot{\vec{OP}}$$

(Esempio $\vec{F} = -kx\hat{i} \Rightarrow -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$
$\Rightarrow x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$)

2a. Corpo nero ma
- se l'energia è continua ⇒ catastrofe ultravioletta
- se l'energia è discreta invece si ritrovano i dati sperimentali

2b, Effetto fotoelettrico ed esperimento di Young: dualità della luce "onda & particella"

$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W$ (ν: frequenza del fotone; W: energia di legame)

2c. Diffrazione elettronica: dualità della materia "onda & particella"

⇒ sembrano particelle che si dispongono spazialmente come se fossero un'unica onda, formando delle figure di interferenza.

3. Conseguenze:
- l'energia <u>non</u> è continua ma quantizzata
- la descrizione delle particelle microscopiche non è deterministica ma probabilistica.

4. Cosa sostituisce la 2° legge di Newton?

$\vec{x}(t) \longrightarrow \Psi(\vec{r}, t)$, funzione d'onda, che deve contenere tutte le informazioni sulle particelle.

$\dot{\Psi}(\underline{r},t)$ non è fisica. $\Rightarrow$ l'eq. per $\Psi(\underline{r},t)$ deve essere del primo ordine nel tempo.

5. Dall'ottica classica: un'onda piana è $\Psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$.

Ovviamente

$$\ddot{\Psi}(x,t) = -\omega^2\Psi(x,t) \qquad \Psi_{xx}(x,t) = -k^2\Psi(x,t) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{\omega^2}\ddot{\Psi}(x,t) = -\frac{1}{k^2}\Psi_{xx}(x,t) \Rightarrow \underbrace{\boxed{\ddot{\Psi}(x,t) = \frac{\omega^2}{k^2}\Psi_{xx}(x,t)}}_{2^\circ \text{ ordine}}$$

ma è anche vero che

$$\dot{\Psi}(x,t) = -i\omega\Psi(x,t) \Rightarrow \frac{i}{\omega}\dot{\Psi}(x,t) = \frac{1}{k^2}\Psi_{xx}(x,t) \Rightarrow$$

$$\boxed{i\dot{\Psi}(x,t) = \frac{\omega}{k^2}\Psi_{xx}(x,t)} \qquad 1^\circ \text{ ordine}$$

6. Quantizzazione: particella libera

$$E = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow \hat{E} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 \qquad \text{dove}$$

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \qquad \boxed{i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi}$$

Particelle soggette a forze

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\underline{r}) \longrightarrow \hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r})$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$+i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad -i\hbar\vec{\nabla} \qquad V(\vec{r})$$

$\hat{r}$ op. di moltiplicazione

$\Rightarrow$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\right]\Psi$$

7. <u>Interpretazione di $\Psi(\underline{r},t)$</u>

È probabilistica $\Rightarrow$ non può essere legata a $\Psi(\underline{r},t)$ o a $\Psi(\underline{r},t)^2$, perché $\Psi(\underline{r},t)$ è, in generale, complessa.

Potrebbe essere legata a $|\Psi(\underline{r},t)|$ o a $|\Psi(\underline{r},t)|^2$. Ma:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}|\Psi(\underline{r},t)|\,d^3\underline{r} \neq 0 \qquad \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}|\Psi(\underline{r},t)|^2 d^3\underline{r} = 0$$

usando l'eq. di Sch. $\Rightarrow$

$|\Psi(\underline{r},t)|^2 d^3\underline{r}$ è la probabilità di trovare la particella al tempo t in un volumetto $d^3\underline{r}$ centrato in $\underline{r}$.

La probabilità, infatti, con questa scelta si conserva: la particella sta da qualche parte, si sposta ma non scompare.

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\Psi(\underline{r},t)|^2 d^3\underline{r} = 1 \qquad \text{la particella si trova da qualche parte.}$$

$$\Rightarrow \Psi(\underline{r},t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$$

8. <u>Remark</u>: un'onda piana non è normalizzabile ($e^{i(kx-\omega t)} \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$). Ciò ~~implica~~ mostra che nessuna particella è veramente "libera": ci sono ostacoli, pareti, interazioni etc...

9. Quantità misurabili da $\Psi(\underline{r},t)$

$$\langle X\rangle := \langle \Psi(\underline{r},t), X\,\Psi(\underline{r},t)\rangle \in \mathbb{R} \qquad \text{se } X = X^\dagger$$

Ad esempio

$$\langle x\rangle = \int_{\mathbb{R}} |\Psi(\underline{x},t)|^2\, x\, d^3\underline{x}$$

$$\langle p_x\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\Psi(\underline{r},t)}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(\underline{x},t)\, d^3\underline{x}$$

$$\langle E \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(\underline{r},t)} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(\underline{r},t)\, d^3\underline{r}$$

10. Questi valori medi sono legati come in meccanica classica (Teorema di Ehrenfest):

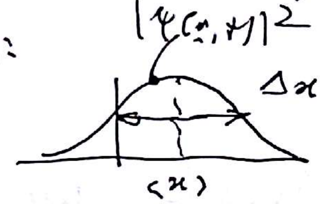
$$\frac{d}{dt}\langle \hat{\underline{r}} \rangle = \frac{1}{m}\langle \hat{p} \rangle \qquad \frac{d}{dt}\langle \hat{p} \rangle = -\langle \vec{\nabla} \hat{V} \rangle$$

11. Gli operatori non commutano in generale.
Ad esempio $x,\ p_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$ $\Rightarrow$

$$[x, p_x] f(x) = -i\hbar \left(x f'(x) - (x f(x))' \right) = i\hbar f(x) \Rightarrow$$

$$[x, p_x] = i\hbar$$

12. Questo produce all'impossibilità di conoscere con assoluta precisione le posizione e la velocità delle particelle:



$$\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle_\psi}$$
$$\Delta p_x = \sqrt{\langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle_\psi}$$

$\Delta x \simeq 0$ $\Rightarrow$ conosciamo molto bene la posizione delle particelle

$\Delta p_x \simeq 0$ $\Rightarrow$ " " " " velocità " "

ma

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Principio di indeterminazione di Heisenberg.

13. Dimostrazione

Introduciamo

$\hat{x} = x - \langle x \rangle \qquad \hat{p} = p_x - \langle p_x \rangle$ e poi

$T_\alpha := \hat{x} + i\alpha \hat{p}_x \qquad \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \| T_\alpha \psi \|^2 \geq 0 \qquad \forall \alpha,$
ovviamente, e $\forall \psi \in \mathcal{H}$.

$$0 \leq \| T_\alpha \psi \|^2 = \langle (\hat{x} + i\alpha \hat{p}_x)\psi, (\hat{x} + i\alpha \hat{p}_x)\psi \rangle = \| \hat{x}\psi \|^2 + |\alpha|^2 \| \hat{p}_x \psi \|^2 +$$
$$+ i\alpha \langle \psi, \underbrace{(\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{x})}_{i\hbar}\psi \rangle = \alpha^2 \| \hat{p}_x \psi \|^2 - \alpha \hbar \| \psi \|^2 + \| \hat{x}\psi \|^2$$

$\Rightarrow$, se $\|\psi\| = 1$

$$\alpha^2 \| \hat{p}_x \psi \|^2 - \alpha \hbar + \| \hat{x} \psi \|^2 \geq 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta = (-\hbar)^2 - 4 \| \hat{p}_x \psi \|^2 \| \hat{x} \psi \|^2 \leq 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\hbar^2 \leq 4 \| \hat{p}_x \psi \|^2 \| \hat{x} \psi \|^2 \qquad \Rightarrow$$

$$\| \hat{p}_x \psi \| \, \| \hat{x} \psi \| \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ma

$$\| \hat{p}_x \psi \|^2 = \langle \hat{p}_x \psi, \hat{p}_x \psi \rangle = \langle \psi, \hat{p}_x^2 \psi \rangle =$$
$$= \langle \psi, (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \psi \rangle = \Delta p_x^2$$

$$\| \hat{x} \psi \|^2 = \Delta x^2 \qquad \Rightarrow$$

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$\square$

$\Rightarrow$ Q.M. coinvolge operatori che non commutano, e dunque regole di indeterminazione.

14. Altre regole di indeterminazione

- $[y, p_y] = i\hbar \Rightarrow \Delta y \, \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$
- $[z, p_z] = i\hbar \Rightarrow \Delta z \, \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$

Ma

- $[x, p_y] = 0 \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p_y = 0$
- $[E, t] = i\hbar \Rightarrow \Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$
  (creazione di particelle - antiparticelle)