

INDICE

PRECORSO DI MATEMATICA

Prof. Marco Pavone

CAPITOLI

- 1) Insiemistica.
- 2) Logica (I Parte).
- 2) Logica (II Parte).
- 3) Numeri interi. Numeri primi.
- 4) Frazioni. Numeri razionali.
- 5) Rappresentazione decimale dei numeri razionali.
- 6) Numeri reali (I Parte).
- 6) Numeri reali (II Parte).
- 7) Equazioni e disequazioni di primo grado.
- 8) Retta reale. Intervalli.
- 9) Valore assoluto.
- 10) Potenze ad esponente intero.
- 11) Radici n-esime.
- 12) Potenze ad esponente razionale e reale.
- 13) Logaritmi.
- 14) Polinomi.
- 15) Equazioni di secondo grado (I Parte).
- 15) Equazioni di secondo grado (II Parte). Disequazioni di secondo grado.
- 16) Piano cartesiano. Equazione della retta e della circonferenza.
- 17) Trigonometria (I Parte).
- 17) Trigonometria (II Parte).
- 17) Trigonometria (III Parte).

INDICE DEI CAPITOLI

1. INSIEMISTICA

Insiemi. Elementi. Appartenenza.

Insieme vuoto.

Unione e intersezione.

Inclusione e uguaglianza tra insiemi.

Differenza insiemistica.

Complementare. Regole di De Morgan.

Distributività dell'unione rispetto all'intersezione e viceversa.

Riformulazione dell'inclusione.

Esercizio.

2. LOGICA (I PARTE)

Differenza tra il linguaggio della logica e il linguaggio ordinario.

Indovinello di Polifemo.

Proposizioni. Valori di verità.

Connettivi logici: non, e, oppure, equivalente a, implica.

Tabelle di verità.

Equazioni equivalenti.

2. LOGICA (II PARTE)

Relazione tra \Leftrightarrow e \Rightarrow .

Non(P e Q). Non(P oppure Q).

Riformulazione di $P \Rightarrow Q$.

Condizioni necessarie. Condizioni sufficienti.

Predicati unari e binari. Significato delle variabili.

Predicati composti.

Variabili specificate o quantificate.

Quantificatore “esiste” e quantificatore “per ogni”.

Negazione di una proposizione quantificata.

Doppia quantificazione di un predicato binario.

Dimostrazione per assurdo.

3. NUMERI INTERI. NUMERI PRIMI

Numeri naturali e loro proprietà.

Numeri interi e loro proprietà.

Elementi neutri rispetto all’addizione e alla moltiplicazione.

Opposto di un numero intero.

Divisione con resto dei numeri interi.

Numeri pari e numeri dispari.

Divisibilità. Multipli e divisori.

Numeri primi.

Scomposizione in fattori primi.

Massimo comun divisore e minimo comune multiplo.

4. FRAZIONI. NUMERI RAZIONALI

Frazioni di interi. Numeratore e denominatore.

Uguaglianza tra due frazioni.

Numeri razionali. Rappresentanti di un numero razionale.

Frazione ridotta ai minimi termini.

Frazioni nulle.

Somma e prodotto di frazioni.

Reciproco di una frazione.

Differenze e quozienti. Frazione di frazioni.

Ordinamento tra frazioni. Frazioni positive e frazioni negative.

5. RAPPRESENTAZIONE DECIMALE DEI NUMERI RAZIONALI

Sistema decimale in base 10. Notazione posizionale.

Somma tra numeri naturali con il “riporto”.

Numeri decimali con la virgola. Allineamenti decimali limitati.

Moltiplicazione e divisione per 10 di un numero con la virgola.

Allineamenti decimali limitati come frazioni con denominatore potenza di 10.

Frazioni esprimibili come allineamenti decimali limitati.

Allineamenti decimali illimitati e periodici.

Allineamento decimale ottenuto a partire da una frazione, e frazione ottenuta a partire da un allineamento decimale.

Corrispondenza biunivoca tra i numeri razionali e gli allineamenti decimali illimitati e periodici.

Ordinamento tra allineamenti. Ordinamento lessicografico.

Percentuali.

6. NUMERI REALI (I PARTE)

Definizione di numero reale.

Numeri irrazionali.

La radice quadrata di 2 è un numero irrazionale.

Opposto di un numero reale.

Ordinamento nei numeri reali. Ordinamento lessicografico.

Numeri positivi e numeri negativi.

Proprietà della relazione d'ordine \leq .

Approssimazioni. Arrotondamenti e troncamenti.

Parte intera di un numero reale.

Somma e prodotto di numeri reali.

Proprietà commutativa dell'addizione e della moltiplicazione.

Elementi neutri rispetto all'addizione e alla moltiplicazione.

Esistenza dell'opposto e del reciproco.

Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.

Relazione tra ordinamento, somma e prodotto.

6. NUMERI REALI (II PARTE)

Differenze e quozienti.

Semplificazioni all'interno di una uguaglianza.

Moltiplicazione per il numero 0.

Prodotti tra reciproci e tra quozienti.

Semplificazione in un quoziente.

Moltiplicazione per il numero -1.

Prodotti e quozienti coinvolgenti i numeri $-x$ e $-y$.

Moltiplicazione dei membri di una disuguaglianza per un numero negativo.

Segno del prodotto tra numeri reali.

Proprietà del reciproco.

Segno del quoziente di numeri reali.

Legge di annullamento del prodotto.

Regola sull'annullamento di un quoziente.

Definizione di un quadrato.

Prodotto notevole $(a+b)(a-b)$.

Segno di un quadrato.

Uguaglianza e disuguaglianza tra due quadrati.

Media aritmetica di due numeri reali.

7. EQUAZIONI E DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Definizione di equazione di primo grado $ax+b=0$.

Equazione di primo grado nella forma $ax=c$.

Soluzioni di un'equazione di primo grado. Esempi. Scorciatoia.

Indovinelli e equazioni di primo grado.

Definizione di disequazione di primo grado.

Soluzioni di una disequazione di primo grado. Esempi.

8. RETTA REALE. INTERVALLI

La retta reale.

Corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri reali e la retta reale.

Interpretazione geometrica dell'ordinamento tra numeri reali.

Interpretazione geometrica dell'opposto di un numero reale e della somma tra un numero reale e un numero positivo.

Formula della distanza tra due numeri reali sulla retta.

Interpretazione geometrica della media aritmetica.

Sottoinsiemi convessi della retta.

Definizione di intervallo reale.

Descrizione dei vari tipi di intervallo. Notazione.

Estremi di un intervallo.

Un intervallo contiene infiniti elementi.

9. VALORE ASSOLUTO

Definizioni equivalenti di valore assoluto di un numero reale.

Interpretazione geometrica del valore assoluto.

Segno del valore assoluto.

Valore assoluto dell'opposto di un numero reale.

Condizione necessaria e sufficiente affinché due numeri abbiano lo stesso valore assoluto.

Elevamento a un esponente intero positivo pari di un valore assoluto.

Formula per la distanza tra due numeri reali sulla retta.

Valore assoluto di un prodotto e di un quoziente.

Condizione necessaria e sufficiente affinché $a^2 < b^2$.

Disuguaglianza triangolare $|a+b| \leq |a|+|b|$.

Soluzioni dell'equazione $|x| = a$ e delle disequazioni $|x| < a$, $|x| > a$ ($a > 0$).

Esempi ed esercizi.

10. POTENZE AD ESPONENTE INTERO

Potenze ad esponente naturale.

Prodotto di potenze con uguale base.

Potenze nulle.

Segno di una potenza ad esponente naturale.

Potenza di potenza.

Potenza di un prodotto e di un quoziente.

Formule del quadrato e del cubo di un binomio.

Condizioni necessarie e sufficienti affinché $a^n < b^n$ e $a^n = b^n$, per n pari e n dispari.

Potenze ad esponente intero.

Reciproco di un numero reale in forma di potenza.

Potenze in base 1.

Segno di potenze con base positiva.

Prodotto e quoziente di potenze con uguale base.

Potenza di potenza.

Potenza di un prodotto e di un quoziente.

Condizioni necessarie e sufficienti affinché $a^n < a^m$, nei casi $a > 1$ e $0 < a < 1$.

11. RADICI N-ESIME

Esistenza e unicità della radice quadrata di 2.

Errori comuni relativamente al concetto di radice quadrata.

Teorema di esistenza e unicità della radice n -esima per n pari e n dispari.

Radicale, indice e radicando.

Esempi ed esercizi.

Radice n-esima di 1, e radice 1-esima.

Radice n-esima dell'opposto, per n dispari.

Segno di una radice n-esima per n pari e n dispari.

Radice n-esima di un prodotto e di un quoziente.

Radice di radice.

Ordinamento tra due radicali con lo stesso indice n.

Radice n-esima elevata a n, e radice n-esima di a^n .

Come portare un numero reale dentro o fuori da una radice n-esima.

Studio dell'equazione $t^n = m$, e delle disequazioni $t^n < m$, $t^n > m$, nei casi n pari e n dispari.

Esempi.

12. POTENZE AD ESPONENTE RAZIONALE E REALE

Definizione di potenza ad esponente razionale.

Dipendenza della potenza dal rappresentante dell'esponente.

Radice n-esima espressa in forma di potenza.

Proprietà delle potenze con base positiva e esponente razionale.

Definizione di 2^π .

Potenze a^x con a e x reali e $a > 0$.

Potenze in base 1.

Segno di potenze con base positiva.

Prodotto e quoziente di potenze con uguale base.

Potenza di potenza.

Potenza di un prodotto e di un quoziente.

Condizione necessaria e sufficiente affinché $a^x < b^x$, con $a, b, x > 0$.

Condizioni necessarie e sufficienti affinché $a^x < a^y$, nei casi $a > 1$ e $0 < a < 1$.

Come esprimere una potenza con base $0 < a < 1$ in forma di potenza con base > 1 .

Numero di Nepero e .

13. LOGARITMI

Definizione di logaritmo. Base e argomento.

Esempi.

Notazione. Logaritmi in base 10 e in base e .

Come scrivere un numero positivo come potenza in base a ($a > 0$, $a \neq 1$) e un numero reale come logaritmo in base a .

Logaritmi di prodotti, di quozienti e di potenze con base positiva.

Condizioni necessarie e sufficienti affinché $\log_a x < \log_a y$, nei casi $a > 1$ e $0 < a < 1$.

Formula di cambiamento di base dei logaritmi.

Cenni sulle tavole dei logaritmi e sul regolo calcolatore.

Equazioni e disequazioni logaritmiche.

Soluzioni dell'equazione $\log_a x = m$ e delle disequazioni $\log_a x > m$, $\log_a x < m$, nei casi $a > 1$ e $0 < a < 1$.

Equazioni e disequazioni esponenziali.

Soluzioni dell'equazione $a^x = m$ e delle disequazioni $a^x < m$, $a^x > m$, nei casi $a > 1$ e $0 < a < 1$.

Esercizi.

Origine della parola logaritmo.

14. POLINOMI

Monomi. Parte numerica e parte letterale.

Grado di un monomio.

Monomi costanti.

Somma di monomi con la stessa parte letterale.

Prodotto di monomi.

Definizione di polinomio.

Coefficienti e grado di un polinomio.

Somma e prodotto di polinomi.

Divisione con resto tra polinomi.

Divisibilità tra polinomi.

Fattorizzazione di polinomi.

Polinomi irriducibili.

Polinomi come funzioni di una variabile reale.

Teorema del resto.

Teorema di Ruffini.

Regola di Ruffini.

Altro metodo pratico per dividere un polinomio $P(x)$ per $x-a$ nel caso in cui $P(a)=0$.

Condizioni necessarie e sufficienti affinché un polinomio di secondo grado sia irriducibile o riducibile.

Teorema generale sulla fattorizzazione di un polinomio a coefficienti reali.

Esempi ed esercizi.

Ricerca di soluzioni razionali dell'equazione $P(x)=0$ per un polinomio P a coefficienti interi.

Esempi.

15. EQUAZIONI DI SECONDO GRADO (I PARTE)

Motivazione.

Definizione di equazione di secondo grado.

Definizione di soluzione di un'equazione di secondo grado.

Premesse concettuali.

Equazioni di secondo grado equivalenti.

Soluzioni dell'equazione $t^2 = m$, nel parametro reale m e nell'incognita reale t .

Soluzioni a coppie di opposti.

Esempi.

Risoluzione di un'equazione di secondo grado per fattorizzazione.

Relazione tra la fattorizzazione del polinomio di secondo grado P e il numero di soluzioni dell'equazione $P(x)=0$.

Ricerca di soluzioni tramite il teorema di Ruffini.

Esempi.

Risoluzione di un'equazione del tipo $x^2 - sx + p = 0$.

Risoluzione di un'equazione di secondo grado per completamento del quadrato.

Esempi.

15. EQUAZIONI DI SECONDO GRADO (II PARTE).

DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Formula risolutiva generale di un'equazione di secondo grado.

Discriminante.

Nota storica sul contributo di Al-Khwarizmi.

Relazione tra il segno del discriminante, il numero di soluzioni dell'equazione e la fattorizzazione del polinomio di secondo grado.

Confronto tra le due soluzioni dell'equazione nel caso di discriminante positivo.

Vantaggi e svantaggi della formula risolutiva generale.

Esempi. Verifica delle soluzioni.

Trucchi per semplificare i calcoli.

Disequazioni di secondo grado.

Definizione di soluzione di una disequazione di secondo grado.

Disequazioni di secondo grado equivalenti.

Principi di equivalenza per le disequazioni.

Riduzione di una disequazione di secondo grado al caso in cui il coefficiente di x^2 è >0 .

Relazione insiemistica tra le soluzioni delle disequazioni di secondo grado con >0 , ≤ 0 , <0 , ≥ 0 .

Formula risolutiva generale di una disequazione di secondo grado con coefficiente di $x^2 >0$.

Esempi. Metodi alternativi di risoluzione.

16. PIANO CARTESIANO. EQUAZIONE DELLA RETTA E DELLA CIRCONFERENZA

Assi cartesiani. Piano cartesiano.

Quadranti.

Coppie ordinate di numeri reali.

Ascissa e ordinata.

L'insieme R^2 .

Corrispondenza biunivoca tra R^2 e il piano cartesiano.

Coordinate cartesiane di un punto del piano.

Origine degli assi cartesiani.

Doppia rappresentazione numerica dei punti degli assi cartesiani.

Posizione reciproca di due punti del piano cartesiano in termini delle loro coordinate.

Esempi di sottoinsiemi del piano descritti tramite le coordinate cartesiane.

Polinomi $P(x,y)$ in due variabili a coefficienti reali.

Soluzioni di un'equazione $P(x,y)=0$ espresse come coppie ordinate di numeri reali.

Equazione di un luogo geometrico.

Equazione di una retta verticale e di una retta orizzontale.

Equazione della retta passante per due punti.

Equazione generale di una retta nella forma $ax+by+c=0$.

Equazione $y = mx+q$ di qualsiasi retta non verticale.

Metodo semplificato per calcolare l'equazione di una retta passante per due punti.

Equazioni di rette parallele o perpendicolari.

Circonferenza nel piano cartesiano.

Formula per la distanza tra due punti del piano cartesiano.

Equazione della circonferenza con centro e raggio fissati.

Tecnica del completamento del quadrato per calcolare centro e raggio di una circonferenza a partire dall'equazione.

Esempi.

Disco chiuso nel piano cartesiano.

Disequazione del disco chiuso.

Esempi ed esercizi.

17. TRIGONOMETRIA (I PARTE).

Definizione di angolo.

Misura in gradi di un angolo. Sistema sessagesimale.

Misura in radianti di un angolo.

Tabella di conversione tra gradi e radianti.

Formula per il calcolo della lunghezza di un arco di circonferenza.

Definizione di seno e coseno di un numero reale.

$$-1 \leq \cos x, \sin x \leq 1.$$

Seno e coseno di un angolo.

Seno e coseno come cateti di un triangolo rettangolo con ipotenusa di lunghezza 1.

Seno e coseno di angoli complementari.

Identità trigonometrica fondamentale: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Parametrizzazione della circonferenza di centro (0,0) e raggio 1 come insieme dei punti $(\cos x, \sin x)$, al variare di x reale.

$$\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x.$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos x, \sin(x+2\pi) = \sin x.$$

Tabella di valori notevoli di seno e coseno.

Studio delle equazioni $\cos x = K$, $\sin x = K$. Esempi.

Definizione di arcoseno e arcocoseno.

17. TRIGONOMETRIA (II PARTE).

Studio delle disequazioni $\cos x \geq 0, < 0, > 0, \leq 0, \sin x \geq 0, < 0, > 0, \leq 0$.

Esprimere $\cos x$ in funzione di $\sin x$ e viceversa.

Studio delle disequazioni $\cos x \geq K, < K, > K, \leq K, \sin x \geq K, < K, > K, \leq K$. Esempi.

Esercizi su equazioni e disequazioni trigonometriche.

Formule di addizione e sottrazione per seno e coseno. Applicazioni.

Formule di duplicazione per seno e coseno.

Formule di bisezione per seno e coseno.

17. TRIGONOMETRIA (III PARTE).

Studio delle soluzioni di $\cos x \neq 0$.

Definizione della tangente trigonometrica.

Tabella di valori notevoli per la tangente.

$$\tan(-x) = -\tan x.$$

$$\tan(x+\pi) = \tan x.$$

Interpretazione geometrica di $\tan x$.

Studio dell'equazione $\tan x = K$. Esempio.

Definizione di arcotangente.

Soluzione della disequazione $\tan x < 1$.

Formule di addizione e sottrazione per la tangente.

Esprimere $\cos x$ e $\sin x$ in funzione di $\tan x$.

Relazioni tra i lati di un triangolo rettangolo.

Definizione di cotangente.

Formule di prostaferesi.

Formule di prostaferesi inverse (o di Werner).

Calcolo di Eratostene di Cirene della lunghezza della circonferenza terrestre.