

REGOLATORI PID

Modello dei regolatori PID

Realizzazione dei regolatori PID

Metodi di taratura automatica

MODELLO DEI REGOLATORI PID

- Larga diffusione in ambito industriale
 - ★ controllo soddisfacente di un'ampia gamma di processi
 - ★ semplici regole di taratura automatica
 - ★ realizzazione con tecnologie varie (meccaniche, pneumatiche, idrauliche, elettroniche analogiche e digitali)

- Variabile di controllo u generata come somma di tre contributi:
 - ★ proporzionale all'errore $e = w - y$
 - ★ proporzionale all'integrale di e (valor medio): errore nullo asintoticamente per segnali di riferimento o disturbi additivi costanti
 - ★ proporzionale alla derivata di e : previsione dell'andamento dell'errore
- Struttura ideale (sistema dinamico SISO lineare stazionario a tempo continuo, improprio)

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

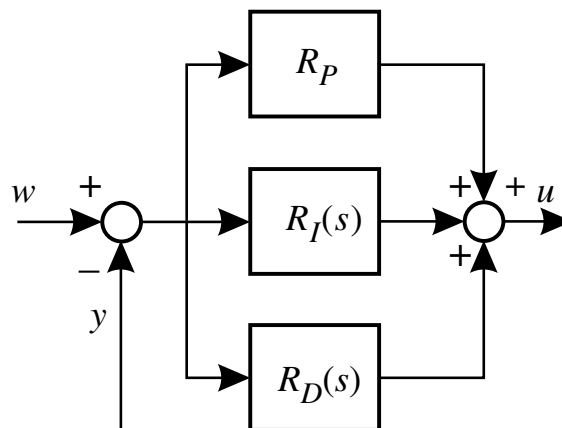
- ★ $K_P \geq 0$: coefficiente dell'azione proporzionale (banda proporzionale $PB = 100/K_P$)
- ★ $K_I \geq 0$: coefficiente dell'azione integrale
- ★ $K_D \geq 0$: coefficiente dell'azione derivativa

- Trasformazione di Laplace ($t_0 = 0$)

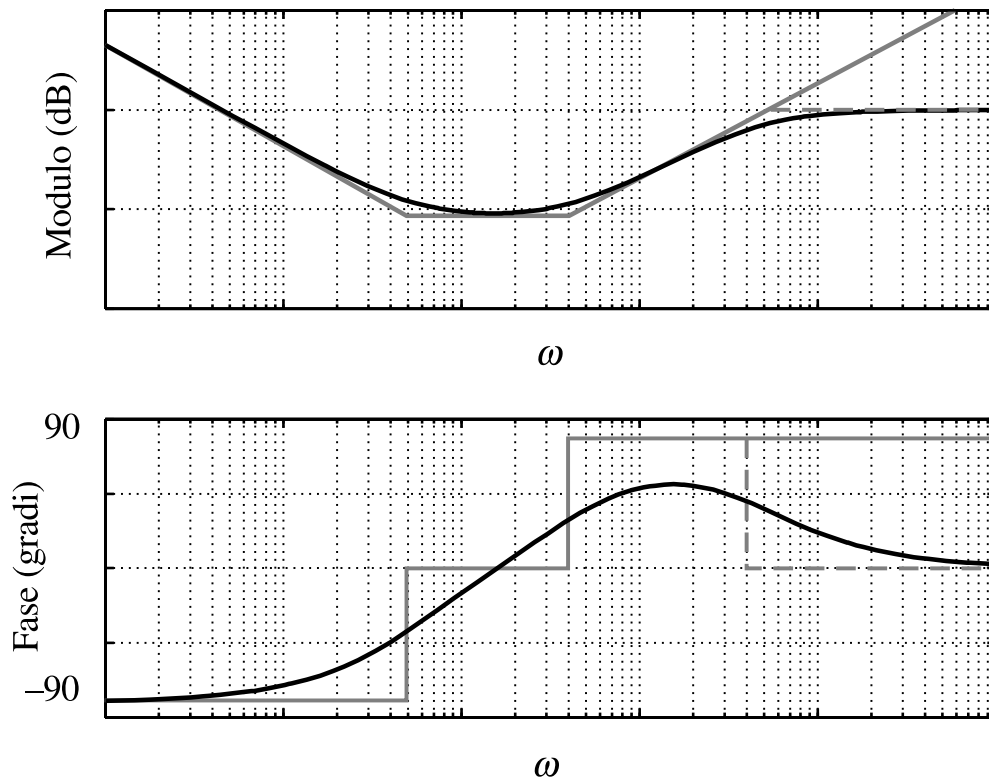
$$\begin{aligned}
 R_{PID} &= R_P + R_D(s) + R_I(s) \\
 &= K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \\
 &= K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = K_P \frac{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}{T_I s}
 \end{aligned}$$

★ $T_I = K_P/K_I$: tempo integrale (o di *reset*)

★ $T_D = K_D/K_P$: tempo derivativo



- Diagrammi di Bode (due zeri a $\text{Re} < 0$ e un polo nell'origine)



- Azione derivativa realizzabile

$$R_D^a(s) = \frac{k_P T_D s}{1 + \frac{T_D}{N} s} = \frac{K_D s}{1 + \frac{K_D}{K_P N} s}$$

- ★ $N > 0$: il polo $s = -N/T_D$ all'esterno della banda di frequenza di interesse nel controllo ($N = 5 \div 20$)

- PID in forma reale

$$\begin{aligned} R_{PID} &= K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D}{1 + \frac{T_D}{N} s} \right) \\ &= K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + \frac{K_D}{K_P N} s} \end{aligned}$$

- ★ zeri praticamente inalterati (per N sufficientemente grande)
- ★ diagrammi di Bode asintotici (linea grigia a tratti precedente)

- Combinazione delle varie azioni tranne:
 - ★ sola azione derivativa (zero nell'origine!)
 - ★ azione integrale e derivativa (buco in frequenza!)
- Regolatori P ($K_I = K_D = 0$ o $T_I \rightarrow \infty, T_D = 0$)

$$R_P = K_P$$

- ★ controllo di processi asintoticamente (o semplicemente) stabili
 - ★ prestazioni statiche non richiedono l'inserimento di un'azione integrale
- Regolatori I ($K_P = K_D = 0$)

$$R_I(s) = \frac{K_I}{s}$$

- ★ reti ritardatrici con polo nell'origine e zero all'infinito (restringimento della banda passante per compensare il contributo di fase negativo)
- ★ requisito stringente sulle prestazioni statiche, ma non sulle prestazioni dinamiche

- Regolatori PI ($K_D = 0$ o $T_D = 0$)

$$R_{PI}(s) = \frac{K_P s + K_I}{s} = K_P \frac{1 + T_I s}{T_I s}$$

- ★ reti ritardatrici con polo nell'origine e zero in $s = -1/T_I$
- ★ azione integrale per prestazioni statiche, con banda passante più ampia grazie alla presenza dello zero
- ★ molto diffusi nel controllo di processi industriali, descrivibili come la serie di una funzione di trasferimento del primo ordine e di un eventuale ritardo (la presenza di un ulteriore zero di un PID completo porterebbe a un allargamento eccessivo della banda passante, nonché a difficoltà di taratura)

- Regolatori PD ($K_I = 0$)

$$R_{PD}(s) = K_P + K_D s = K_P(1 + T_D s)$$

- ★ rete anticipatrice con zero in $s = -K_P/K_D = -1/T_D$ e polo all'infinito (polo aggiuntivo in alta frequenza per la realizzabilità)
- ★ non vi sono problemi di stabilità o di prestazioni statiche
- ★ necessario ottenere la banda passante più ampia possibile

- Regolatori PID

- ★ polo nell'origine e due zeri in

$$s = \frac{-T_I \pm \sqrt{T_I(T_I - 4T_D)}}{2T_I T_D}$$

(polo aggiuntivo in alta frequenza: zeri praticamente invariati)

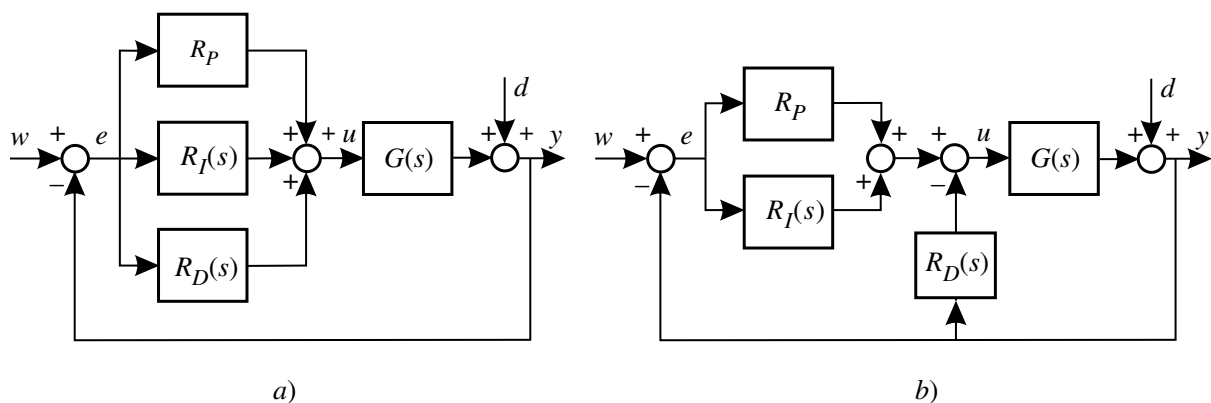
- ★ zeri: reali per $T_I \geq 4T_D$, coincidenti in $s = -1/2T_D$ per $T_I = 4T_D$ (per semplificare la taratura)
- ★ rete a sella
- ★ controllo per vaste classi di sistemi

REALIZZAZIONE DEI REGOLATORI PID

- Vari accorgimenti volti a migliorare le prestazioni del sistema di controllo

Limitazione dell'azione derivativa

- PID con derivazione dell'errore
 - ★ in presenza di uno scalino di w , l'uscita del derivatore e di conseguenza u sono di tipo impulsivo \Rightarrow saturazione dell'attuatore (allontanamento dalle condizioni di linearità)
- PID con derivazione dell'uscita
 - ★ y uscita di un sistema del tipo filtro passa-basso (variazioni contenute della derivata)



★ PID con derivazione dell'errore

$$Y(s) = \frac{R_{PID}(s)G(s)}{1 + R_{PID}(s)G(s)}W(s) + \frac{1}{1 + R_{PID}(s)G(s)}D(s)$$

$$U(s) = \frac{R_{PID}(s)}{1 + R_{PID}(s)G(s)}W(s) - \frac{R_{PID}(s)}{1 + R_{PID}(s)G(s)}D(s)$$

★ PID con derivazione dell'uscita

$$Y(s) = \frac{R_{PI}(s)G(s)}{1 + R_{PID}(s)G(s)}W(s) + \frac{1}{1 + R_{PID}(s)G(s)}D(s)$$

$$U(s) = \frac{R_{PI}(s)}{1 + R_{PID}(s)G(s)}W(s) - \frac{R_{PID}(s)}{1 + R_{PID}(s)G(s)}D(s)$$

★ stessa equazione caratteristica (proprietà di stabilità identiche)

$$1 + R_{PID}(s)G(s) = 0$$

★ stesse funzioni di trasferimento tra d e y ($S(s)$), tra d e u ($-Q(s)$)

★ $Y(s)/W(s)$ hanno entrambe guadagno unitario (azione integrale sull'errore), $S(s)$ ha uno zero nell'origine \Rightarrow errore prodotto da w o d costanti asintoticamente nullo (asintotica stabilità del sistema retroazionato)

★ diversi zeri delle funzioni di trasferimento tra w e y , tra w e u

• Esempio

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)^3}$$

★ PID ideale ($K_P = 2, K_I = K_D = 1, T_I = 2, T_D = 0.5$)

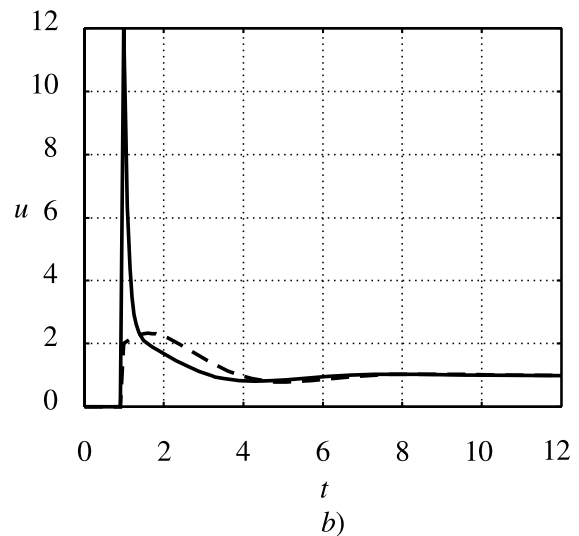
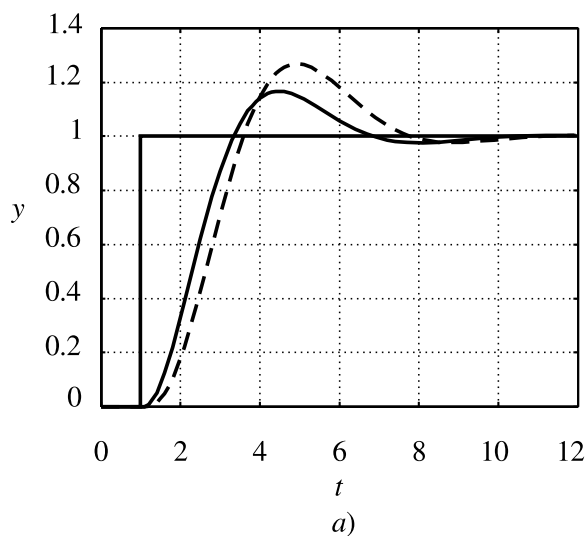
$$R_{PID}(s) = \frac{(s + 1)^2}{s}$$

★ funzione d'anello

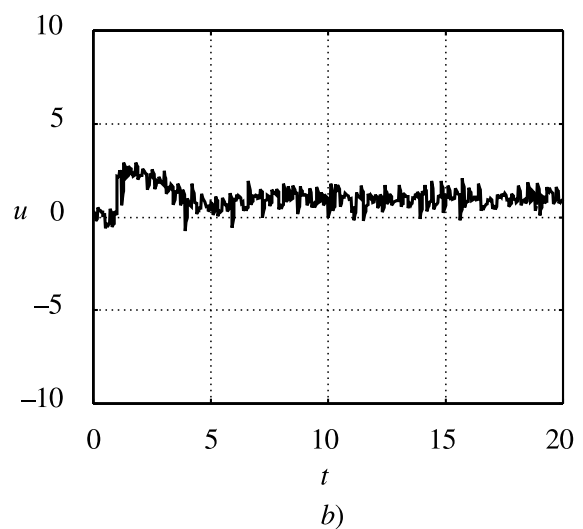
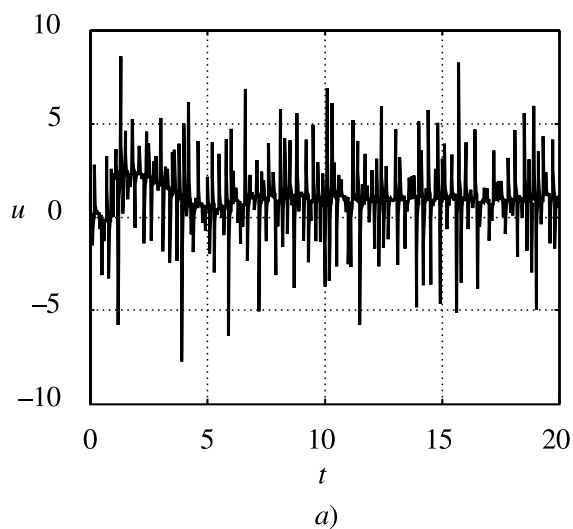
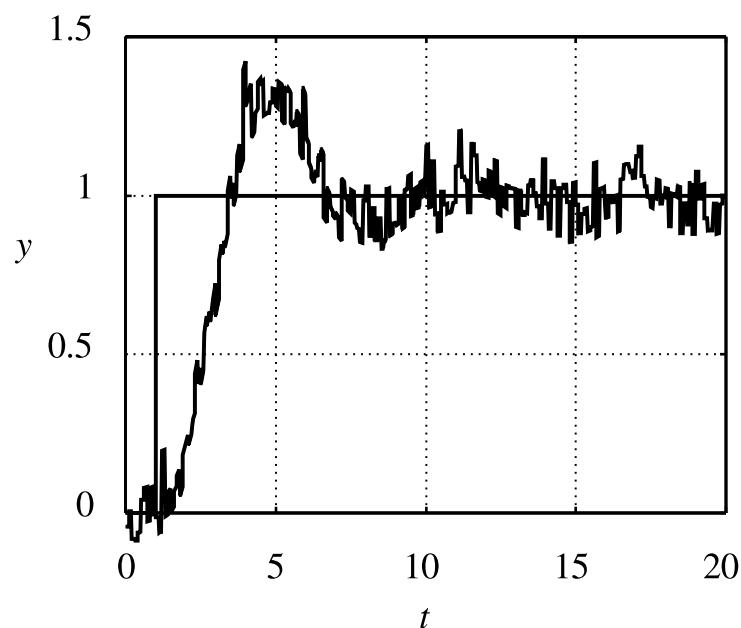
$$L(S) = R_{PID}(s)G(s) = \frac{1}{s(s + 1)} \implies \begin{matrix} \omega_c \simeq 0.78, & \varphi_m \simeq 52^\circ \\ k_m \simeq \infty \end{matrix}$$

★ PID reale ($N = 5$): aggiunta di un polo in $s = -N/T_D = -10, \omega_c \simeq 0.8, \varphi_m \simeq 51^\circ, k_m \simeq 22$

risposta a $w(t) = sca(t - 1)$: andamento di y e u con lo schema a derivazione dell'errore (linea continua) e con quello a derivazione dell'uscita (linea a tratti)



- Scelta di N : elevato per approssimare il PID ideale, ma non troppo per evitare che componenti in alta frequenza di d vengano amplificate su u
- Esempio (precedente)
 - ★ d generato come segnale con spettro costante
 - ★ a) $N = 30$; b) $N = 5$



- ★ taratura parametri sulla base di modello accurato, altrimenti l'azione derivativa può produrre una variabile di controllo eccessivamente sollecitata (regolatori PI preferiti in campo industriale)

- Azione proporzionale applicata solo sull'uscita (variazioni meno brusche della variabile di controllo)

$$U(s) = K_P E_P(s) + \frac{K_I}{s} E(s) + K_D s E_D(s)$$

$$E(s) = W(s) - Y(s)$$

$$E_P(s) = \alpha W(s) - Y(s)$$

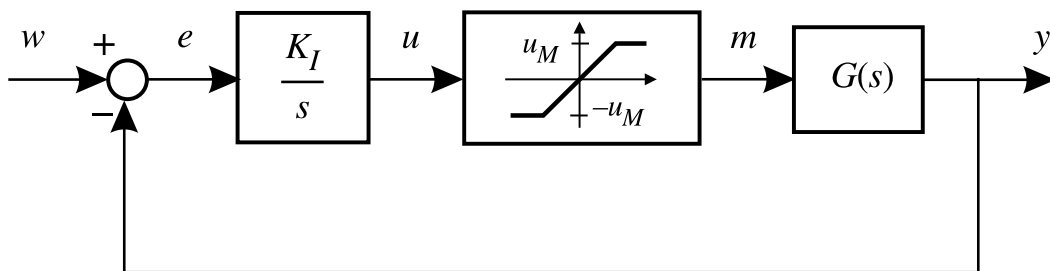
$$E_D(s) = \beta W(s) - Y(s)$$

- ★ α e β scelti in modo da migliorare le prestazioni del sistema retroazionato (variano solo gli zeri delle funzioni di trasferimento $Y(s)/W(s)$ e $U(s)/W(s)$)

Desaturazione dell'azione integrale

- Attuatore saturante (regolatore I)

$$m(t) = \begin{cases} -u_M & u(t) < -u_M \\ u(t) & |u(t)| \leq u_M \\ u_M & u(t) > u_M \end{cases}$$



- Fenomeno della carica integrale (*wind-up*)
 - ★ errore e dello stesso segno per un certo periodo $\Rightarrow u$ cresce in modulo sempre più (anche se interviene la saturazione)
 - ★ quando e cambia segno \Rightarrow bisogna attendere che u torni nel campo di linearità (scarica dell'azione integrale)

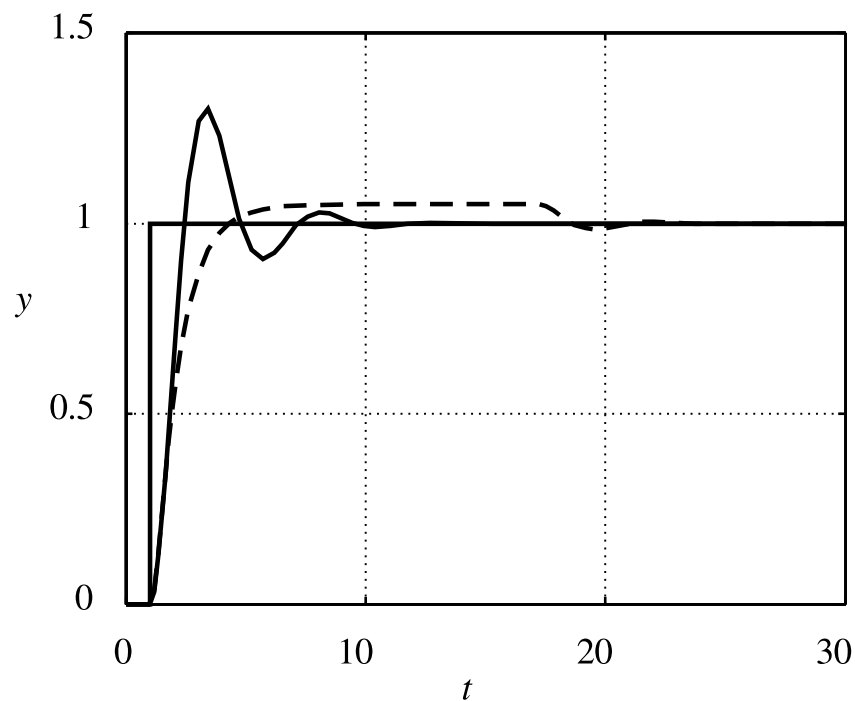
● Esempio

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad K_I = 2$$

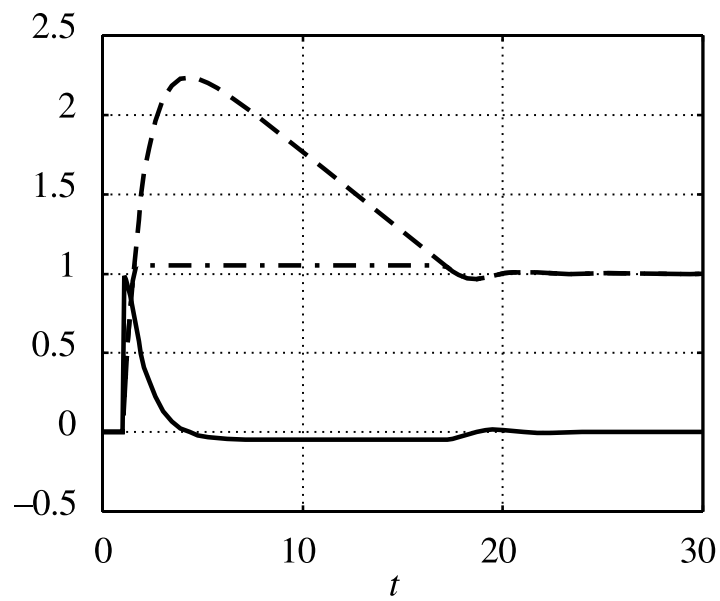
★ in assenza di saturazioni: $\omega_c \simeq 1.25$, $\varphi_m \simeq 39^\circ$

★ $u_M = 1.05$

risposta a $w(t) = sca(t-1)$: andamento di y nel caso lineare (linea continua) e in presenza dell'attuatore saturante (linea a tratti)



andamento di e (linea continua), u (linea a tratti) e m (linea a tratto e punto) in presenza dell'attuatore saturante



● Schema di desaturazione

- ★ wind-up presente anche per regolatori con altre azioni (oltre quella integrale)

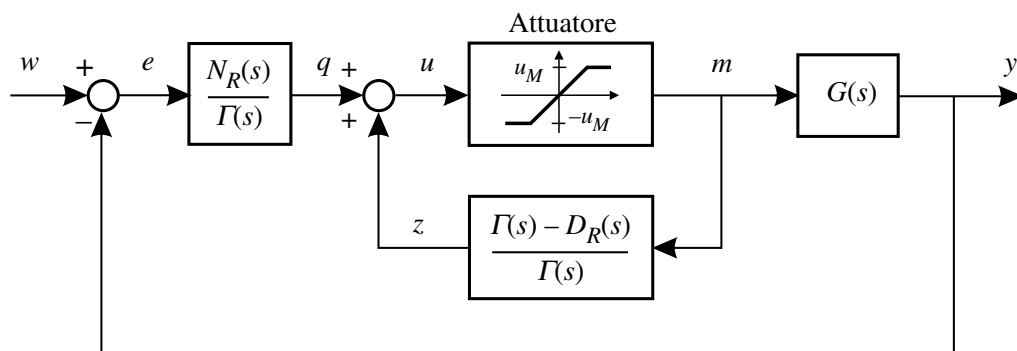
$$R(s) = \frac{N_R(s)}{D_R(s)} \quad N_R(0) > 0, D_R(0) = 0$$

- ★ scelta di $\Gamma(s)$:

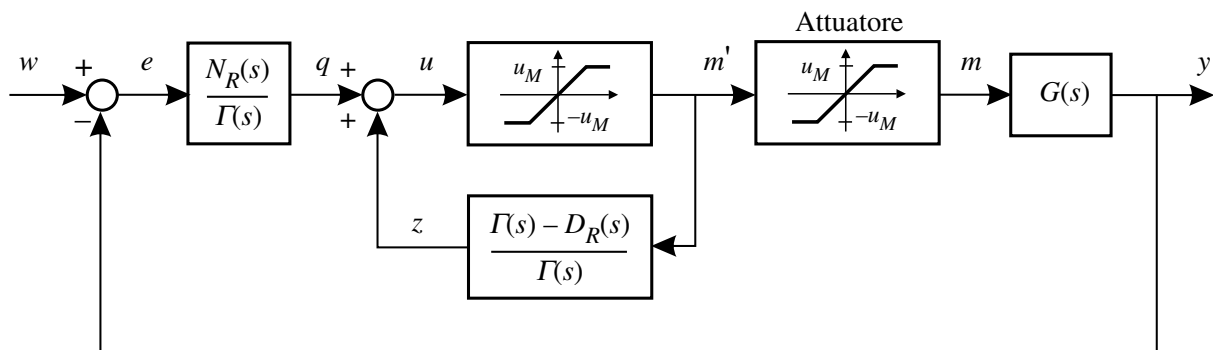
$$\Psi(s) = \frac{\Gamma(s) - D_R(s)}{\Gamma(s)} \quad \Psi(0) = 1$$

asintoticamente stabile e strettamente propria

- ★ uscita dell'attuatore misurabile o no



a)



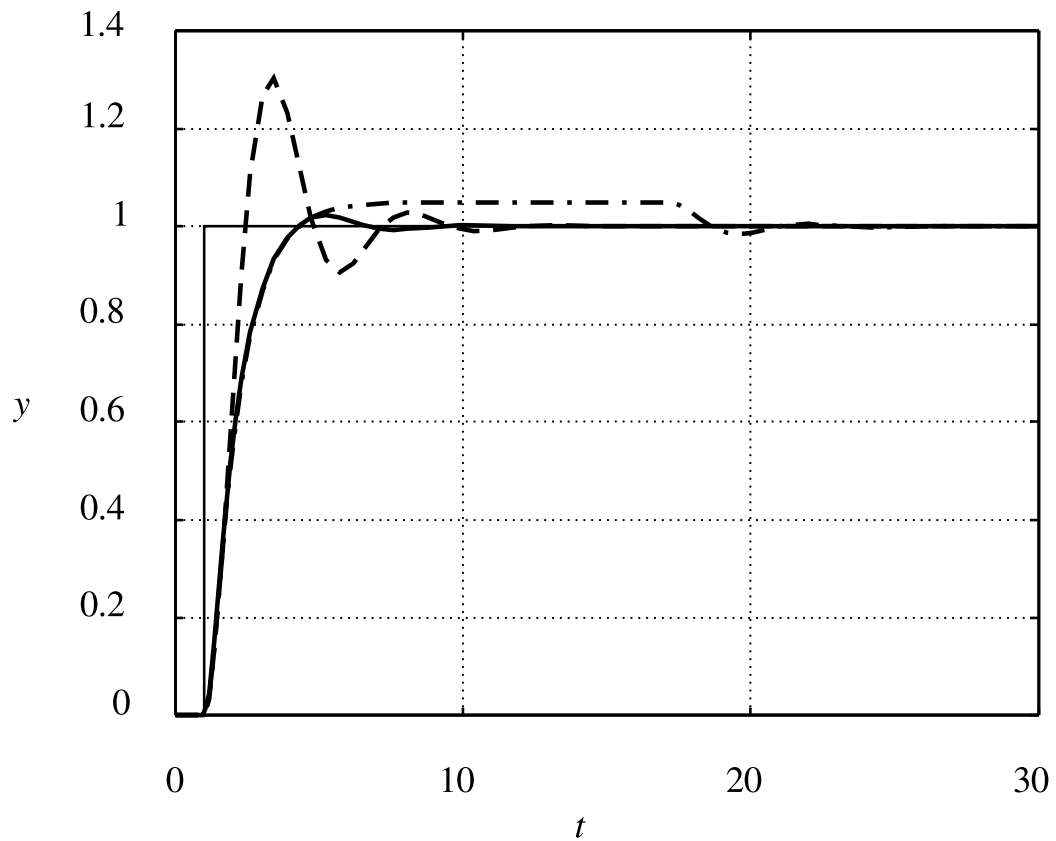
b)

- Funzionamento

- ★ in zona di linearità: funzione di trasferimento tra e e m invariata
- ★ errore costante positivo: dopo un transitorio di durata dipendente da $\Gamma(s) \Rightarrow q$ positiva; $m = u_M: z \rightarrow u_M (\Psi(0) = 1)$ con dinamica funzione di $\Gamma(s)$
- ★ quando e cambia segno $\Rightarrow q$ negativa, $u = q + z$ al di sotto di u_M (funzionamento lineare ripristinato, quanto più rapido è il transitorio dovuto a $\Gamma(s)$)

- Esempio (precedente)

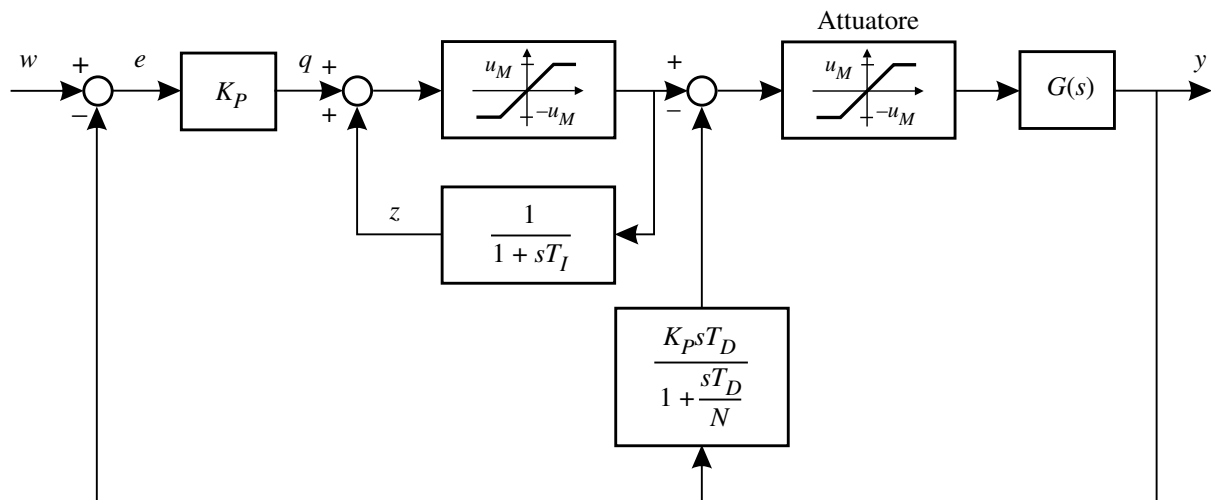
★ uscita dell'attuatore misurabile: $\Gamma(s) = s + 10 \Rightarrow \Psi(s) = 10/(s + 10)$



★ prestazioni persino migliori, in termini di $S\%$

- Schema di realizzazione dei regolatori PID con desaturazione

$$\star \Gamma(s) = 1 + sT_I$$

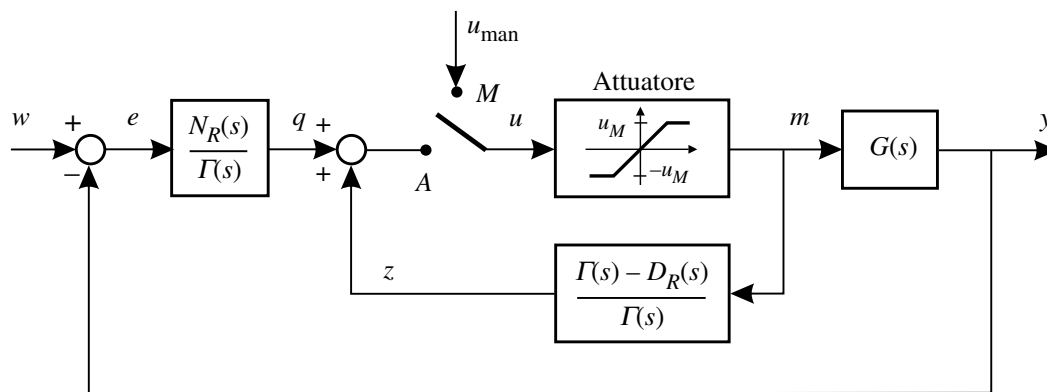


Inserimento “morbido” della regolazione automatica

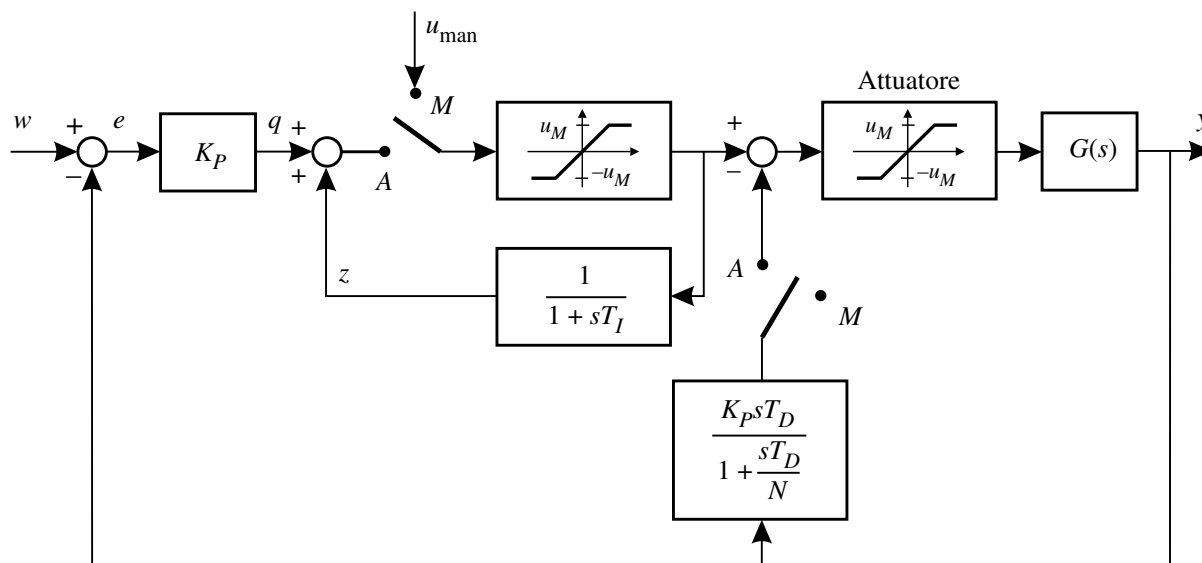
- Sistema di controllo operante nell’intorno di un punto di funzionamento nominale
 - ★ ipotesi non verificata in molte applicazioni industriali, durante la fase di avviamento dell’impianto (ad es. regolazione di livello a partire da condizione iniziale con serbatoio vuoto)
- ⇓
- Opportunità di controllare inizialmente il sistema con altre tecniche, ad es. controllo manuale, per poi commutare sulla regolazione automatica quando si è raggiunto un intorno del punto di funzionamento nominale
 - ★ all’atto della commutazione: regolatore in grado di fornire istantaneamente un valore della variabile di controllo molto simile a quello impiegato sino a quel momento (inserimento morbido)

- Schema di desaturazione e inserimento morbido della regolazione automatica: a) per un generico regolatore, b) per un PID

★ se commuta da M ad A con $e \simeq 0 \Rightarrow q = 0$, $z = u_{\text{man}}$, uscita azione derivativa nulla, m conserva il valore u_{man} subito dopo la commutazione

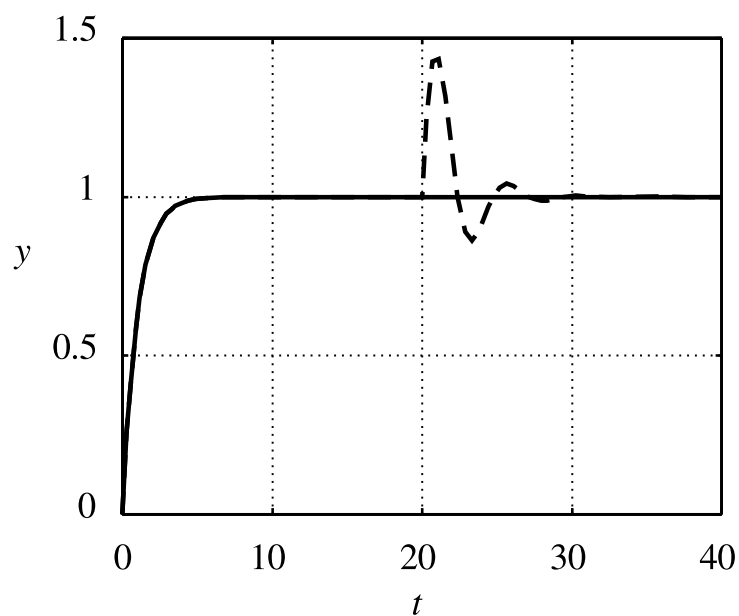


a)



b)

- Esempio (precedente)
 - ★ regolatore I
 - ★ all'inizio: controllo manuale $u_{\text{man}} = 1$
 - ★ a $t = 20$: commutazione sul controllo automatico con $w = 1$, eventualmente con $\Gamma(s) = s + 10$ per $t \geq 20$
 - ★ andamento dell'uscita senza schema di inserimento morbido (linea a tratti) e con (linea continua)



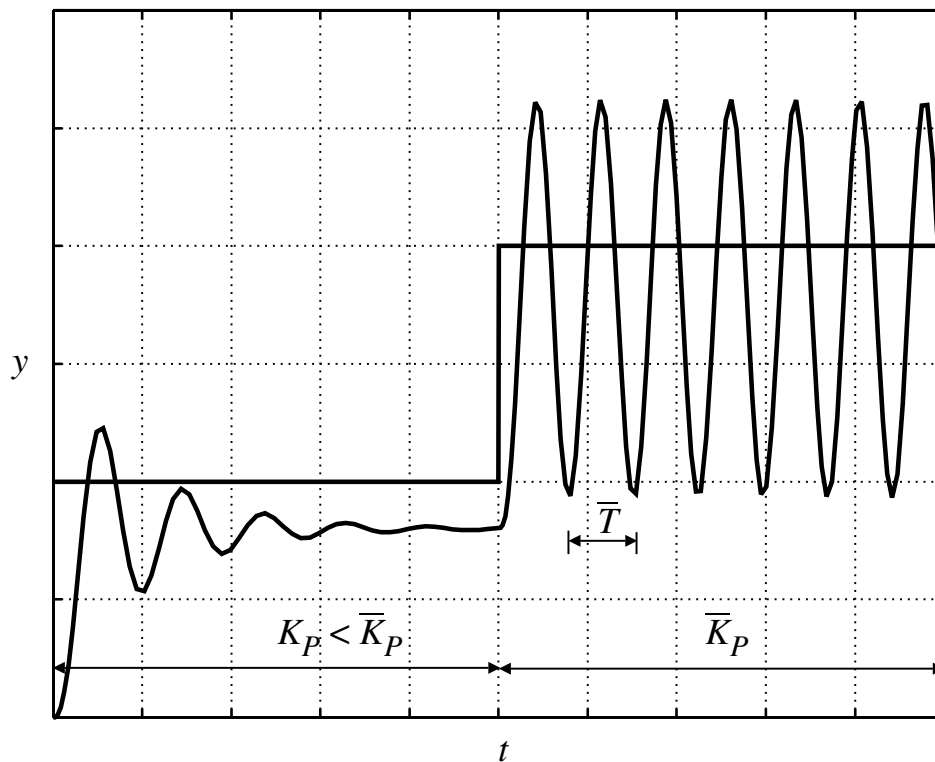
METODI DI TARATURA AUTOMATICA

- Funzione di trasferimento del sistema controllato nota
 - ★ parametri del PID tarati per mezzo di tecniche di sintesi

- Determinazione onerosa del modello rispetto all'esigenza di progettare un regolatore in grado di fruire prestazioni accettabili
 - ★ metodi automatici di taratura che consentono di pervenire direttamente alla sintesi del regolatore a partire da specifiche prove effettuate sul processo
 - ★ sistema controllato assunto asintoticamente stabile e con guadagno positivo

Metodi in anello chiuso

- Metodo di Ziegler e Nichols in anello chiuso
 - ★ all'inizio: sola azione proporzionale, innalzando K_P sino a portare il sistema retroazionato al limite di stabilità (y in oscillazione permanente di periodo \bar{T} a fronte di variazioni a scalino imposte a w): guadagno critico \bar{K}_P



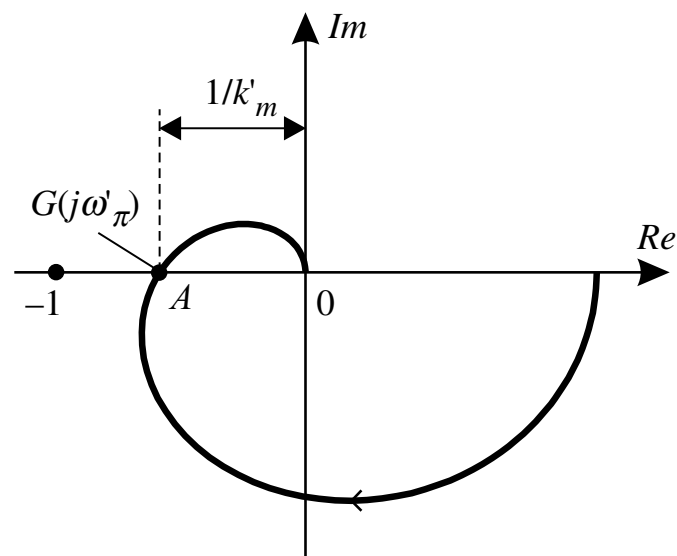
- Regole di taratura

	K_P	T_I	T_D
P	$0.5\bar{K}_P$		
PI	$0.45\bar{K}_P$	$0.8\bar{T}$	
PID	$0.6\bar{K}_P$	$0.5\bar{T}$	$0.125\bar{T}$

- Interpretazioni

★ $\bar{K}_P = k'_m$ di $G(s)$ (margine di guadagno finito)

★ $\bar{T} = 2\pi/\omega'_\pi$



- Esempio

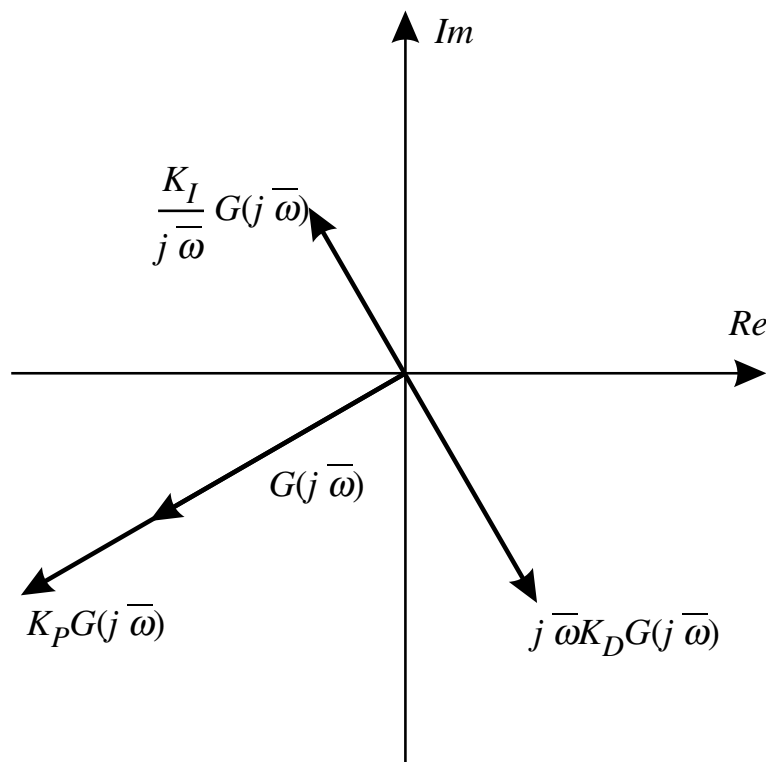
$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^3}$$

- ★ $\omega'_\pi = \sqrt{3}, k'_m = 8 \Rightarrow \bar{K}_P = 8, \bar{T} \simeq 3.63$
- ★ PI: $K_P = 3.6, T_I = 2.9 \Rightarrow \varphi_m \simeq 14^\circ, \omega \simeq 1.2, k_m \simeq 1.5$
(prestazioni poco soddisfacenti)
- ★ PID ($N = 10$): $K_P = 4.8, T_I = 1.815, T_D = 0.454 \Rightarrow$
 $\varphi_m \simeq 29^\circ, \omega \simeq 1.4, k_m \simeq 9$ (prestazioni migliori, zeri del
PID coincidenti in $s = -1.1$ e prossimi ai poli di $G(s)$)

- Valutazione delle prestazioni attendibili da un regolatore progettato secondo le regole di taratura

★ regolatore P: sfasamento nullo, $K_P G(j\omega'_\pi) = 0.5 \bar{K}_P G(j\omega'_\pi) = -0.5 \Rightarrow k_m = 2$

★ regolatore PID: è possibile spostare il punto $R_{PID}(j\bar{\omega})G(j\bar{\omega})$ nel piano complesso mediante scelta opportuna dei parametri



- Spostamento del punto di attraversamento del diagramma polare con il semiasse reale negativo

★ PI

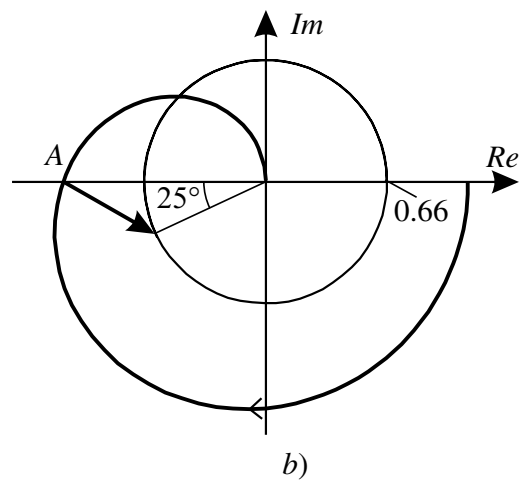
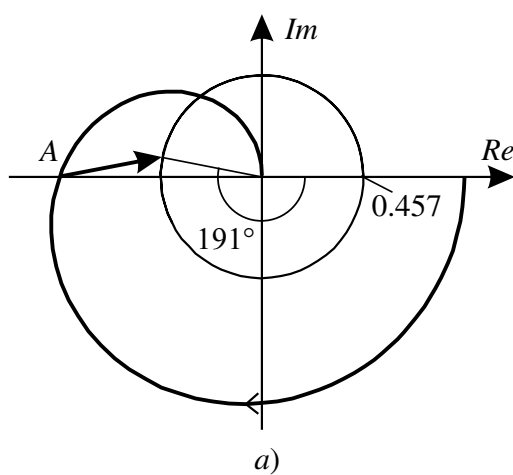
$$R_{PI}(j\omega'_\pi)G(j\omega'_\pi) = 0.45\bar{K}_P \left(1 + \frac{1}{j1.6\pi}\right) \frac{-1}{K_P}$$

$$\simeq -0.45 + j0.08 = 0.457e^{-j(180^\circ + 11^\circ)}$$

★ PID

$$R_{PID}(j\omega'_\pi)G(j\omega'_\pi) = 0.6\bar{K}_P \left(1 + \frac{1}{j\pi} + \frac{j\pi}{4}\right) \frac{-1}{K_P}$$

$$\simeq -0.6(1 + j0.47) = 0.66e^{-j(180^\circ - 25^\circ)}$$

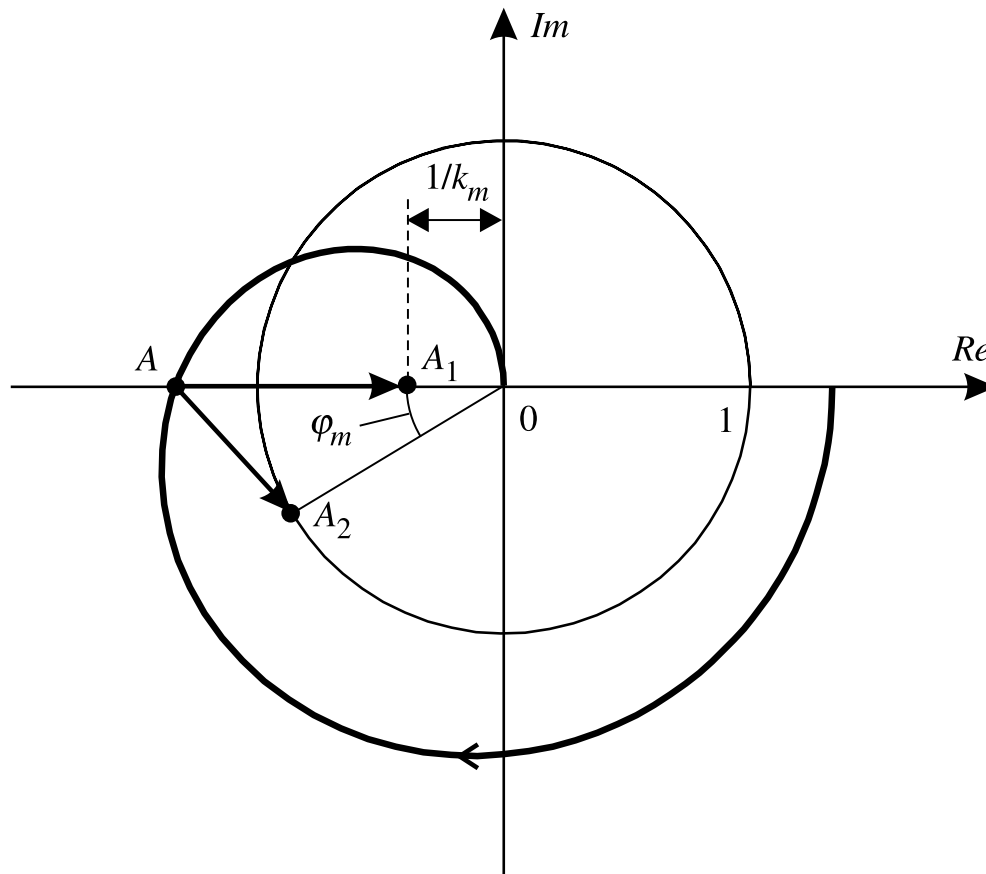


- Limiti di applicabilità
 - ★ sistemi particolarmente delicati o potenzialmente pericolosi (limite di stabilità)
 - ★ sistemi del primo o del secondo ordine con margine di guadagno infinito

- Assegnamento del margine di guadagno

- ★ regolatore P

$$R_P = K_P = \frac{\bar{K}_P}{k_m}$$



- ★ regolatore PID

$$\frac{1}{j\omega'_\pi T_I} + j\omega'_\pi T_D = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \omega'^2_\pi T_I T_D = 0$$

$$T_I = 4T_D \text{ (zeri reali e concidenti)} \Rightarrow T_I = 2/\omega'_\pi, T_D = 1/2\omega'_\pi$$

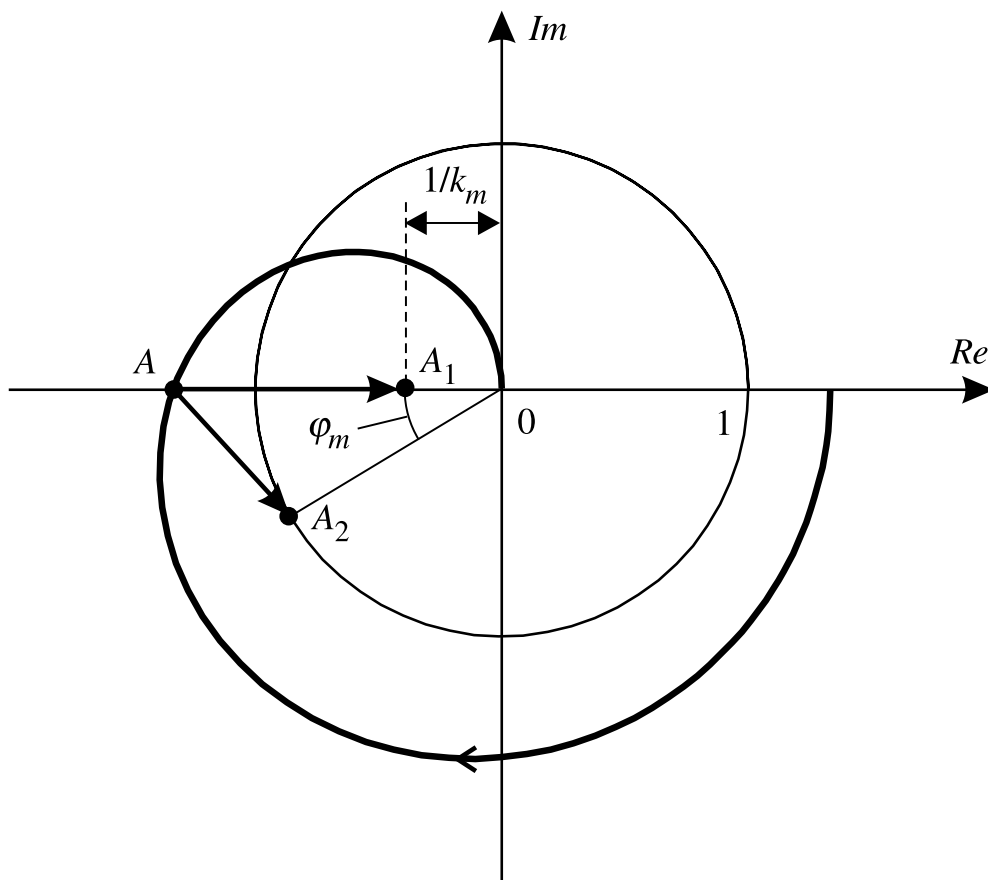
- Esempio (precedente)

$$\star k_m = 9: K_P = 0.89, T_I = 1.16, T_D = 0.29 \Rightarrow \varphi_m \simeq 38^\circ, \\ \omega_c \simeq 0.56$$

- Assegnamento del margine di fase

$$\arg(R_{PID}(j\omega'_\pi)G(j\omega'_\pi)) = \left(\frac{\varphi_m}{180} - 1\right)\pi$$

$$|R_{PID}(j\omega'_\pi)G(j\omega'_\pi)| = 1$$



$$\arg\left(1 + \frac{1}{j\omega'_\pi T_I} + j\omega'_\pi T_D\right) = \varphi_m \frac{\pi}{180}$$

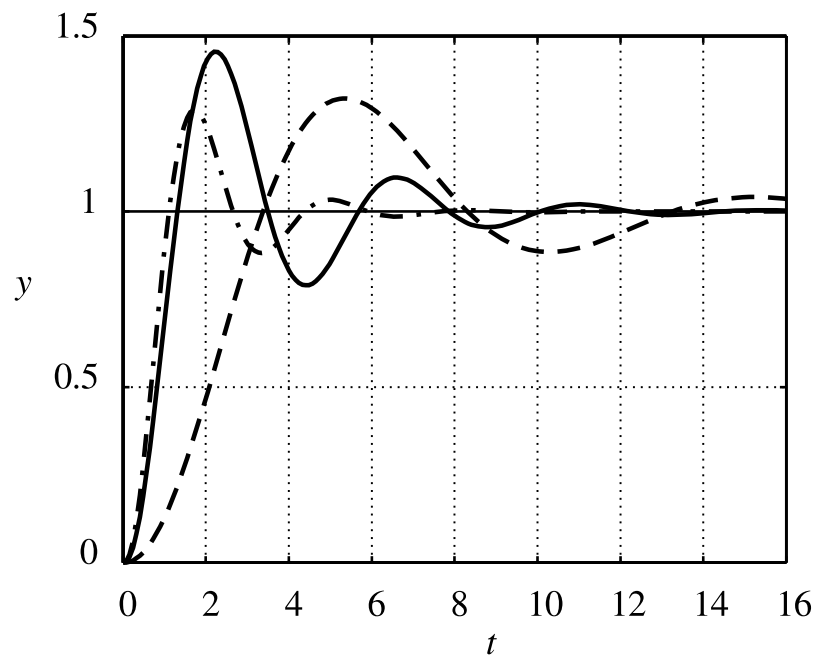
$$\left|K_P \left(1 + \frac{1}{j\omega'_\pi T_I} + j\omega'_\pi T_D\right) \frac{-1}{\bar{K}_P}\right| = 1$$

$$\omega'_\pi - \frac{1}{\omega'_\pi T_I} = \tan(\varphi_m)$$
$$K_P = \bar{K}_P \cos(\varphi_m)$$

- Esempio (precedente)

★ $\varphi_m = 45^\circ$: $K_P = 5.66$, $T_I = 2.79$, $T_D = 0.697$, $N = 10$
 $\Rightarrow \varphi_m \simeq 39^\circ$, $\omega_c \simeq 1.8$, $k_m \simeq 5.69$

★ confronto della risposta allo scalino: regole di taratura (linea continua), margine di guadagno (linea a tratti) e margine di fase (linea a tratto e punto)



Metodi in anello aperto

- Metodo di Ziegler e Nichols in anello aperto
 - ★ modello approssimato del sistema da controllare

$$G_a(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} e^{-\tau s}$$

- Regole di taratura

	K_P	T_I	T_D
P	$\frac{T}{\mu\tau}$		
PI	$\frac{0.9T}{\mu\tau}$	3τ	
PID	$\frac{1.2T}{\mu\tau}$	2τ	0.5τ

- ★ regolatore PI, $\tau/T \in [0.1, 1]$

$$\varphi_m = 77.8^\circ \frac{\tau}{T} + 14.95^\circ$$

$$k_m = 0.87 \frac{\tau}{T} + 1.47$$

- Esempio (precedente)

- ★ modello approssimato: $\mu = 1, T = 1.83, \tau = 1.17$

- ★ regolatore PI: $K_P = 1.41, T_I = 3.51 \Rightarrow \varphi_m \simeq 63^\circ, \omega_c \simeq 0.59, k_m \simeq 4.15$

- ★ regolatore PID: $K_P = 1.87, T_I = 2.34, T_D = 0.59, N = 10 \Rightarrow \varphi_m \simeq 62.5^\circ, \omega_c \simeq 0.74, k_m \simeq 21.3$