



## MODELLAZIONE FEM DEL COMPORTAMENTO VISCO-ELASTO-PLASTICO DI CONGLOMERATI BITUMINOSI PER USO STRADALE

Di Mino G. \*, Di Liberto C.M. \* e Bevilacqua A. \*

\* Dipartimento di Ingegneria delle Infrastrutture Viarie (DIIV)

Università di Palermo

Viale delle Scienze, 90128 Palermo, Italy

e-mail: gaetano.dimino@unipa.it

**Key words:** Asphalt Concrete, Mechanical Behaviour, Fem Modelling, Road Pavements.

**Parole chiave:** Conglomerato Bituminoso, Comportamento Meccanico, Modellazione FEM, Pavimentazioni Stradali.

**Abstract.** *In this work, the Authors aim to formulate a model for describing the mechanical behavior of asphalt mixture that may be easily implemented in commonly used FEM software programs, in order to make a rigorous structural analysis of flexible pavement easy to apply for practitioners.*

*After a brief review of the existing constitutive models, starting from the easiest to the most complicated ones, a conclusion can be made about the fact that the easiest modeling strategy is to split the material's response, in terms of total deformation, into different components and to describe them all individually.*

*Amongst the different constitutive equation reviewed, the studied one is particularly interesting. In fact, as it will be shown via comparison with experimental results, the proposed model is able to describe the main aspects of the mechanical response of asphalt concrete.*

*In particular, the elastoplastic component of the model is described by the Von Mises law, with isotropic hardening, while the viscous component is described by a power creep law as a function of temperature, loading time and stress level.*

*In order to calibrate the proposed model, FEM numerical simulations of uniaxial compression creep tests have been performed in a range of temperature and stress levels with the finite-element-program ADINA and compared with the corresponding experimental results of tests carried out in laboratory.*

**Sommario.** *In questo lavoro si è voluto formulare un modello per descrivere il comportamento meccanico del conglomerato bituminoso di uso stradale che può essere facilmente implementato in programmi software FEM di uso comune, al fine di effettuare una rigorosa analisi strutturale delle pavimentazioni flessibili.*

*Dopo una breve rassegna dei modelli costitutivi esistenti, a partire dai più semplici fino ai più complessi, è possibile concludere che un corretto metodo di modellazione consiste nel dividere la risposta del materiale, in termini di deformazione totale, nelle diverse componenti*

*e di descriverle tutte separatamente.*

*Nel confronto con i risultati sperimentali, il modello proposto è in grado di descrivere i principali aspetti della risposta meccanica del conglomerato bituminoso.*

*In particolare, la componente elastoplastica del modello è descritta dalla legge di Von Mises, con incrudimento isotropo, mentre la componente viscosa è descritta da una legge di creep di potenza, come una funzione della temperatura, del tempo di applicazione del carico e del livello tensionale.*

*Al fine di calibrare il modello proposto, con l'ausilio del codice di calcolo ADINA, sono state effettuate simulazioni numeriche FEM della prova di creep di compressione uniassiale in un prefissato campo di temperature e livelli tensionali, ed i risultati sono stati confrontati, infine, con i corrispondenti risultati sperimentali delle prove effettuate in laboratorio.*

## 1 INTRODUZIONE

Le pavimentazioni stradali in conglomerato bituminoso devono resistere in modo adeguato, nell'arco della loro vita utile, alle sollecitazioni meccaniche e termiche conferite dal transito dei veicoli e dall'ambiente climatico esterno.

Tali sollecitazioni sono responsabili delle degradazioni superficiali che, raggiunte e superate certe soglie di severità, divengono fattori di rischio oggettivo per la circolazione stradale.

Lo studio, quindi, del comportamento meccanico dei conglomerati bituminosi, sottoposti a determinate condizioni di sollecitazione, e in particolare la previsione della sua evoluzione, diviene elemento essenziale per la progettazione e la manutenzione delle sovrastrutture flessibili.

Nella sua forma più generale la risposta del conglomerato bituminoso all'azione dei carichi esterni è di tipo elasto-viscoplastico, a causa delle caratteristiche intrinseche dei suoi componenti, principalmente il legante bituminoso, e della sua stessa struttura di aggregazione. In circostanze ordinarie di sollecitazione, tipiche cioè degli usuali assali veicolari, la risposta del materiale segue una legge di tipo viscoelastico, connotata dalla forte dipendenza dal tempo di applicazione del carico, mentre, superato un certo livello, il conglomerato bituminoso tende a deformarsi in modo irreversibile e permanente, rivelando un comportamento prevalentemente plastico.

In virtù della termo-suscettività propria del legante bituminoso, le proprietà viscoelastiche e viscoplastiche del conglomerato risultano particolarmente accentuate ciascuna nell'ambito di specifici intervalli di temperature.

A temperature di esercizio elevate, intorno ai 40 °C e progressivamente maggiori, il conglomerato tende a connotarsi come materiale dal comportamento esclusivamente viscoplastico.

Tale particolare natura induce il materiale a deformarsi in maniera permanente, provocando dunque una progressiva accumulazione degli effetti distorsivi che conducono, in ultima istanza, a degradi inammissibili per un corretto e sicuro esercizio della pavimentazione stradale.

L'obiettivo del presente lavoro consiste nella definizione della metodologia sperimentale necessaria e le correlate interpretazioni dei risultati per ottenere una coerente e plausibile modellazione meccanica del conglomerato bituminoso.

Di seguito, viene presentata una rassegna dei principali modelli costitutivi proposti in letteratura, il cui comun denominatore operativo è la decomposizione della deformazione totale in più parti e della conseguente singola descrizione.

I vari ricercatori hanno usato tecniche differenti per definire ciascuna componente di deformazione, come ad esempio la teoria sulla viscoplasticità di Perzyna, il criterio di rottura di Drucker Prager, il modello di Burger.

Per ciascuno di essi, è necessaria l'elaborazione di procedure di prova standardizzate per l'identificazione numerica dei "parametri di modello" che caratterizzano il materiale dal punto di vista reologico e meccanico.

## 2 STATO DELL'ARTE SUI MODELLI COSTITUTIVI

Nella quasi totalità degli studi con forte connotazione sperimentale si riscontra che la deformazione totale per un materiale elasto-viscoplastico ha delle componenti reversibili e delle componenti irreversibili, delle quali alcune sono dipendenti dal tempo.

In base a queste considerazioni e riferendosi ad una prova di creep, la deformazione totale, per il primo ciclo, può essere scomposta in quattro componenti:

$$\varepsilon = \varepsilon^E + \varepsilon^{VE} + \varepsilon^{VP} + \varepsilon^P \quad (1)$$

dove:

- $\varepsilon$  è la deformazione totale;
- $\varepsilon^E$  è la deformazione elastica, che è reversibile e indipendente dal tempo;
- $\varepsilon^{VE}$  è la deformazione viscoelastica, che è reversibile e dipendente dal tempo;
- $\varepsilon^{VP}$  è la deformazione viscoplastica, che è irreversibile e dipendente dal tempo;
- $\varepsilon^P$  è la deformazione plastica, che è irreversibile e indipendente dal tempo.

La risposta istantanea è indipendente dal tempo ed include una componente elastica ed una plastica, mentre la risposta dipendente dal tempo include la componente viscoelastica e la componente viscoplastica.

Nella fase di scarico la risposta istantanea riguarda solamente la componente elastica, mentre la componente dipendente dal tempo è quella viscoelastica. Dopo un tempo molto lungo, la risposta del materiale tende ad essere asintotica alla somma delle componenti viscoplastica e plastica, che sono le componenti di deformazione irreversibili.

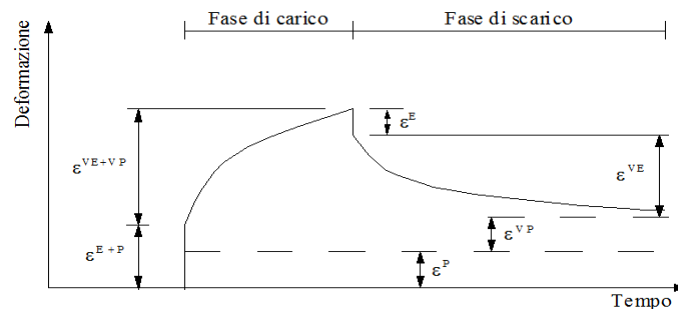


Figura 1: Rappresentazione schematica delle componenti di deformazione in un materiale elasto-viscoplastico.

Il contributo relativo ad ogni componente di deformazione è funzione della temperatura e della velocità con cui è applicato il carico [1]. In caso di alte temperature e bassa velocità di applicazione del carico, la componente viscoplastica è il contributo maggiore della deformazione complessiva, mentre per basse temperature e alta velocità di applicazione del carico il contributo maggiore è quello viscoelastico. Pertanto la formazione di deformazioni permanenti sulla sovrastruttura stradale (ormai) si verifica nei mesi dell'anno più caldi, in combinazione con carichi di traffico lento e pesante; tali deformazioni sono principalmente di tipo viscoplastico e plastico, mentre il contributo viscoelastico è trascurabile.

La formulazione completa della teoria della plasticità non può prescindere dal fenomeno dell'incrudimento del materiale per effetto dell'invecchiamento del materiale [2].

Esistono molti studi in letteratura sulla modellazione delle deformazioni permanenti nei conglomerati bituminosi; tra questi, la teoria della plasticità è stata ampiamente usata per descrivere il loro comportamento tempo-dipendente. Sulla base delle nozioni della plasticità classica, la formulazione di Perzyna [3] risulta particolarmente adatta ad essere implementata agli elementi finiti (FEM) [4]; tuttavia va considerato che esistono diverse espressioni matematiche per descrivere la funzione di plasticizzazione, in quanto la forma esatta può essere determinata solo sperimentalmente.

Abdulshafi e Majidzadeh [5] hanno sviluppato un modello costitutivo monodimensionale elasto-viscoplastico che è una combinazione del modello di Burger connesso in serie ad un

dispositivo attritivo (per rappresentare la deformazione plastica con il criterio di Drucker-Prager). Il modello è stato calibrato mediante prove di creep dinamico e la soluzione è stata utilizzata per valutare la formazione di deformazioni permanenti; tale modello è stato completato con una serie di prove sperimentali per identificare e valutare numericamente i parametri.

La deformazione totale è scomposta in una parte dipendente dal tempo (componente viscosa) e una indipendente dal tempo (componente elastoplastica). La teoria classica dell'elasticità, la teoria della plasticità con la legge di flusso associato e il criterio di plasticizzazione di Drucker-Prager sono stati usati per valutare la parte elasto-plastica, mentre il modello di Burger è stato utilizzato per la modellizzazione della parte viscosa.

I parametri del modello, vale a dire il modulo resiliente diametrale, la resistenza a trazione indiretta, la resistenza a compressione non confinata, gli incrementi di compressione statica e gli incrementi di trazione statica indiretta sono stati determinati per via sperimentale.

Sides ed altri [6] hanno sviluppato un legame costitutivo per le mescole sand-asphalt, sottoposte a cicli di carico di compressione e di trazione. Il modello rappresenta le deformazioni residue come somma della componente viscoelastica, plastica e viscoplastica.

La componente plastica è stata schematizzata usando una legge di potenza, che lega le sollecitazioni e il numero di ripetizioni di carico. La componente viscoelastica è stata rappresentata come prodotto tra una legge di potenza funzione del tempo e una funzione della sollecitazione. Infine, la deformazione viscoplastica è stata modellata con la stessa formulazione della componente viscoelastica, ma usando dei parametri diversi. I parametri del materiale sono stati determinati con una serie di prove di creep dinamico monoassiale e prove di compressione e trazione a tensione costante.

Con questo modello gli autori hanno mostrato che, ad una temperatura di 25°C, la deformazione residua è composta esclusivamente dalle componenti irreversibili (plastica e viscoplastica).

Desai e Zhang [7] hanno sviluppato un modello costitutivo originariamente per materiali quali sabbie e salgemma, utilizzando la teoria sulla viscoplasticità di Perzyna [3]. Tale modello è stato modificato ed è utilizzato, ancora oggi, da molti ricercatori per i conglomerati bituminosi.

I parametri del materiale hanno un ben preciso significato fisico e sono stati determinati in laboratorio con prove multiassiali, triassiali e creep quasi statico.

Sousa ed altri [8] hanno sviluppato un modello viscoelastico non lineare con danno per prevedere le deformazioni permanenti dei conglomerati bituminosi, anche tenendo conto dell'anisotropia del materiale. Il modello consiste in un numero di elementi di Maxwell tridimensionali collegati in parallelo, in cui ogni elemento è composto da una molla non lineare e da uno smorzatore viscoso.

I parametri elastici non-lineari del modello sono stati determinati con prove di taglio ad altezza costante, di carico uniassiale e di analisi volumetrica. I parametri viscosi sono stati determinati con prove di taglio a frequenza variabile, mentre quelli di danno con prove di taglio a frequenza variabile e ad altezza costante. Aggiungendo la componente di danno al modello, l'interpolazione tra i dati misurati sperimentalmente e quelli simulati migliorarono notevolmente.

Florea [9] ha sviluppato un modello elasto-viscoplastico per conglomerati bituminosi al fine di descrivere le caratteristiche meccaniche dei materiali trattati a bitume, come la riduzione e/o l'aumento di volume ed i fenomeni tempo-dipendenti. Il suo modello si basa sul presupposto che i conglomerati bituminosi siano materiali omogenei ed isotropi e che le deformazioni possono essere considerate piccole. La deformazione totale è stata suddivisa in

una parte elastica ed in una plastica o irreversibile; per caratterizzare la componente elastica è stata utilizzata la teoria dell'elasticità, mentre per la componente irreversibile la legge di flusso associata della teoria sulla viscoplasticità di Perzyna [3]. Tale modello descrive bene le caratteristiche meccaniche del materiale da un punto di vista qualitativo, non altrettanto può dirsi dal punto di vista quantitativo. Lo stesso Florea, tuttavia, ha migliorato il modello precedente utilizzando una funzione potenziale della plasticità diversa dalla funzione di plasticizzazione, cioè la legge di flusso non-associato [10].

Sousa e Weissman [11] hanno ulteriormente proposto un modello costitutivo per la caratterizzazione delle deformazioni permanenti nei conglomerati bituminosi, tenendo conto di diversi fattori quali la suscettibilità termica, il diverso comportamento del materiale a compressione e a trazione, la percentuale di vuoti, l'invecchiamento, l'umidità, la deformazione residua per carichi ciclici. I ricercatori migliorarono il modello viscoelastico non lineare sviluppato da Sousa nel 1993, aggiungendo una componente di deformazione elastoplastica basata sulla superficie di plasticizzazione di Von Mises con incrudimento isotropo e cinematico.

I parametri del materiale si determinano attraverso numerose prove di creep tangenziale ad altezza costante, prove di carico uniassiale, prove di taglio a frequenza variabile e ad altezza costante e prove di taglio cicliche ad altezza costante.

Sebbene tale modello non sia riuscito a cogliere tutti i fattori da cui dipende la complessa risposta del conglomerato bituminoso, ne ha individuato alcuni ed è stato implementato in una simulazione agli elementi finiti al fine di prevedere l'accumulo di deformazione in una sezione di una pavimentazione.

Scarpas ed altri [4] hanno sviluppato un modello costitutivo, utilizzando la teoria sulla viscoplasticità di Perzyna [3] con la superficie di plasticizzazione di Desai [12-14].

I parametri del materiale legati al percorso e alla variazione di velocità del carico sono stati determinati mediante prove di trazione e di compressione triassiale, mentre quelli dipendenti dalla viscosità e dall'incrudimento tramite prove di creep.

Il modello è stato implementato in un sistema dinamico non lineare agli elementi finiti, per simulare la risposta meccanica delle pavimentazioni flessibili; tale simulazione ha evidenziato come tutti gli elementi in prossimità del carico sono soggetti ad intense deformazioni tangenziali, mentre gli strati superficiali sono quelli più sollecitati dalle tensioni tangenziali.

Secondo il modello costitutivo elasto-viscoplastico di Lu e Wright [15], la deformazione totale è costituita da una parte elastica, da una viscoelastica ed da un'altra viscoplastica; per descrivere la componente elastica è stata usata la legge di Hooke, la legge di potenza funzione del tempo e dello stato tensionale per la componente viscoelastica e la teoria sulla viscoplasticità di Perzyna [3] per quella viscoplastica.

Il modello costitutivo formulato da Seibi ed altri [16], considera la deformazione totale costituita da due componenti, una elastica ed una viscoplastica.

La componente viscoplastica è stata descritta mediante il criterio di plasticizzazione di Drucker-Prager e la teoria di Perzyna [3].

Gli autori, inoltre, hanno sviluppato una tecnica di ottimizzazione in codici di calcolo agli elementi finiti per identificare efficacemente i parametri del materiale e per generalizzare la relazione tensione-deformazione al caso multiassiale.

Il modello costitutivo proposto da Huang ed altri [17], di tipo termo-viscoplastico, tiene conto sia dell'influenza delle variazioni di temperatura sia delle variazioni di velocità di applicazione dei carichi sul comportamento dei conglomerati bituminosi ed al tempo stesso si basa sul modello di plasticità HiSS (Hierarchical Single Surface), realizzato in precedenza da Desai ed altri [12-14].

Secondo gli autori, il modello costitutivo HiSS è elasto-plastico e utilizza la stessa superficie di plasticizzazione proposta da Desai. L'approccio gerarchico consente lo sviluppo progressivo di ulteriori modelli a cui corrispondono diversi gradi di complessità. Il modello di base assunto, considerando il materiale plastico isotropo ad incrudimento isotropo, non ha comportato una deviazione della normale alla superficie di plasticizzazione. Modelli più avanzati con incrudimento isotropo con risposta non-associata a causa dell'attrito o anisotropia possono essere ottenuti modificando il modello di base.

Huang [17] ha utilizzato la stessa superficie di plasticizzazione di Desai [14], ripresa successivamente anche da Scarpas [4].

Per determinare i parametri del materiale sono state utilizzate prove triassiali e di creep a tre temperature diverse. Inoltre, è stato sviluppato un algoritmo per prove di deformazione triassiale, basato sul percorso di tensione, e successivamente è stata effettuata una comparazione tra i risultati calcolati e quelli sperimentali.

In definitiva, la tecnica comune dei modelli costitutivi analizzati consiste nella decomposizione e descrizione della deformazione totale in più parti. I vari ricercatori hanno usato tecniche differenti per definire ciascuna componente, come ad esempio, la legge di potenza funzione del tempo, della tensione e del numero di ripetizioni di carico, il modello di Maxwell e di Burger, la teoria sulla viscoplasticità di Perzyna.

Tuttavia, oltre a disporre di un modello costitutivo valido, è necessario elaborare procedure di prova standardizzate per la determinazione dei parametri di modello [11, 18].

Secondo Lytton [19] e Cela [18] la prova di carico triassiale è una delle più appropriate sia per la semplicità e per la precisione, sia perché induce uno stato di tensione tangenziale che risulta essere la causa principale delle deformazioni permanenti nelle pavimentazioni flessibili.

Numerosi ricercatori, altresì, hanno posto l'attenzione sull'importanza della valutazione del danno e della sua evoluzione nel formulare modelli costitutivi [8, 20-25].

Secondo Sousa [8], infatti, un modello integrato di deformazione permanente e di danno, che tenga conto anche degli aspetti legati al degrado delle proprietà meccaniche, migliora la sua capacità di predire le misure sperimentali. Bisogna sottolineare, però, che la maggior parte dei modelli disponibili di meccanica del danno non è stata sottoposta a verifica sperimentale e non considera l'anisotropia microstrutturale dei conglomerati bituminosi.

Tashman [26], infatti, ha provato che i conglomerati bituminosi presentano una distribuzione microstrutturale anisotropa dovuta al fatto che gli aggregati si dispongono preferibilmente in senso orizzontale. A causa di tale natura anisotropa gli sforzi applicati inducono delle deformazioni non coassiali e, di conseguenza, la relativa legge di flusso associato è inapplicabile ad essi e a i materiali granulari in generale.

### 3 FORMULAZIONE DEL MODELLO

Il modello preso in considerazione è quello sviluppato da Snyder ed al.[26, 27], sul quale è basato il modello costitutivo *Termo-Elastic-Plastic Creep Material* implementato nel codice di calcolo ADINA; il modello tiene conto degli effetti combinati della termo-elasticità, della termo-plasticità e del creep (deformazione viscosa); di conseguenza, tutte le proprietà del materiale (modulo di Young, tensione di incrudimento, etc...) sono variabili sia con la temperatura ( $\theta$ ) sia con il tempo ( $\tau$ ).

La parte termo-plastica del modello utilizza la funzione di plasticizzazione di Von Mises con incrudimento isotropo, mentre la formulazione di creep usa equazioni di stato basate sulla *power creep law* con incrudimento in deformazione (*strain hardening rule*).

Il presupposto base della formulazione è che per piccole deformazioni il relativo tensore può essere espresso come somma della deformazione elastica, della deformazione plastica, del creep e della deformazione termica:

$${}^{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = {}^{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^E + {}^{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^C + {}^{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^P + {}^{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{TH} \quad (2)$$

dove:

- ${}^{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$  è l'elemento  $ij$  della deformazione totale del tensore delle deformazioni;
- ${}^{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^E$  è l'elemento  $ij$  della deformazione elastica del tensore delle deformazioni;
- ${}^{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^P$  è l'elemento  $ij$  della deformazione plastica del tensore delle deformazioni;
- ${}^{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^C$  è l'elemento  $ij$  della deformazione da creep del tensore delle deformazioni;
- ${}^{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{TH}$  è l'elemento  $ij$  della deformazione termica del tensore delle deformazioni;

La legge costitutiva per i materiali isotropici, termoplastici temperatura-dipendente, è espressa mediante la relazione sottostante:

$${}^{\tau}\boldsymbol{\sigma}_{ij} = {}^{\tau}C_{ijrs}^E \cdot {}^{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^E = {}^{\tau}C_{ijrs}^E \cdot ({}^{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_{rs} - {}^{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_{rs}^P - {}^{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_{rs}^C - {}^{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_{rs}^{TH}) \quad (3)$$

dove

$${}^{\tau}C_{ijrs}^E = {}^{\tau}\lambda\delta_{ij}\delta_{rs} + {}^{\tau}\mu(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr}) \quad (4)$$

è la componente elastica del tensore costitutivo al tempo  $\tau$ , e dove:

- ${}^{\tau}\lambda = \frac{{}^{\tau}E \cdot {}^{\tau}\nu}{(1 + {}^{\tau}\nu)(1 - 2{}^{\tau}\nu)}$ ;
- ${}^{\tau}\mu = \frac{{}^{\tau}E}{2(1 + {}^{\tau}\nu)}$ ;
- ${}^{\tau}E$  è il modulo di Young;
- ${}^{\tau}\nu$  è il coefficiente di Poisson;
- $\delta_{ij}$  è il delta di Kronecker;
- ${}^{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_{rs}^{TH} = {}^{\tau}\alpha_m ({}^{\tau}\theta - {}^{\tau}\theta_R)$  è l'elemento  $ij$  della deformazione termica del tensore delle deformazioni, con  ${}^{\tau}\theta$  e  ${}^{\tau}\theta_R$  rispettivamente la temperatura, e la temperatura di riferimento, al tempo  $\tau$ ;
- ${}^{\tau}\alpha_m$  è il coefficiente di espansione termica medio.

### 3.1 Termo-plasticità

Per l'analisi del comportamento meccanico nella regione di plasticità, la teoria classica incrementale della plasticità tempo-indipendente, la quale è stabile per condizioni isoterme, si basa sulla definizione di una funzione di plasticizzazione, di una legge di flusso e di una legge di incrudimento [28-32].

Come conseguenza del postulato di Druker [33], nell'ipotesi di materiali plastici stabili in condizioni isoterme, la funzione di snervamento definisce una superficie convessa nello spazio delle tensioni a nove dimensioni; inoltre, quando gli assi della velocità di deformazione plastica e della tensione coincidono, il vettore velocità di deformazione è ortogonale alla superficie di plasticizzazione (*normality condition*).

Sulla base della teoria isoterma, si è assunto che, per condizioni non isoterme,



l'equazione generale della funzione di carico o di plasticizzazione è:

$${}^{\tau}F = {}^{\tau}F({}^{\tau}\sigma_{ij}, {}^{\tau}\alpha_{ij}, {}^{\tau}\sigma_y) \quad (5)$$

dove,  ${}^{\tau}\alpha_{ij}$  e  ${}^{\tau}\sigma_y$  (tensione di snervamento) sono funzioni della storia della deformazione plastica e della temperatura, mentre la tensione di snervamento è indipendente dalla velocità di applicazione del carico [34]. Inoltre, il comportamento elastico del materiale si ha quando risulta  ${}^{\tau}F < 0$ , mentre il comportamento plastico si ha quando  ${}^{\tau}F = 0$ .

Per sviluppare tale modello di plasticità per condizioni non isotermitiche, si è assunto che la funzione  ${}^{\tau}F$  definisce nello spazio tensione-temperatura a dieci dimensioni una superficie di plasticizzazione convessa e che rimane valida la condizione di normalità isotermitica; sotto queste ipotesi la velocità di deformazione plastica può essere definita come:

$${}^{\tau}\mathcal{E}_{ij}^p = {}^{\tau}\Lambda \frac{\partial {}^{\tau}F}{\partial {}^{\tau}\sigma_{ij}} \quad (\text{legge di flusso}). \quad (6)$$

dove  ${}^{\tau}\Lambda$  è una variabile scalare positiva legata allo stato del materiale e alla sua storia di deformazione plastica.

Per calcolare in forma esplicita la variabile  ${}^{\tau}\Lambda$  è necessario fissare, sia la funzione di plasticizzazione, sia la legge di incrudimento del materiale, la quale descrive come varia la superficie iniziale di snervamento all'aumentare della deformazione plastica; comunemente si prendono in considerazione due tipi di incrudimento, quello cinematico e quello isotropo: il primo è più appropriato per condizioni cicliche di carico, il secondo per condizioni di carico variabili in modo monotono.

Sulla base di quanto detto, la funzione di plasticizzazione di Von Mises per incrudimento isotropo e per condizioni non isotermitiche assume la seguente forma:

$${}^{\tau}F = \frac{1}{2} {}^{\tau}s_{lm} {}^{\tau}s_{lm} - \frac{1}{3} {}^{\tau}\sigma_y^2 \quad (7)$$

dove

- ${}^{\tau}s_{lm} = {}^{\tau}\sigma_{lm} - \frac{{}^{\tau}\sigma_{aa}}{3} \delta_{lm}$  è la componente deviatorica di tensione;
- ${}^{\tau}\sigma_y = {}^{\tau}\sigma_y({}^{\tau}\bar{\epsilon}^P, {}^{\tau}\theta)$  è la tensione di snervamento;
- ${}^{\tau}\bar{\epsilon}^P = \int_0^{\tau} {}^{\tau}\mathcal{E}^p dt$  è la deformazione plastica efficace;
- ${}^{\tau}\mathcal{E}^p = \sqrt{\frac{2}{3} {}^{\tau}\mathcal{E}_{ij}^p {}^{\tau}\mathcal{E}_{ij}^p}$  è la velocità di deformazione plastica efficace.

Il passo successivo è allora quello di determinare lo scalare  ${}^{\tau}\Lambda$  in funzione dello stato del materiale, della temperatura e della velocità di deformazione, la cui espressione in questo caso è:

$${}^{\tau}\Lambda = \frac{{}^{\tau}s_{ij} {}^{\tau}C_{ijmn}^E ({}^{\tau}\mathcal{E}_{mn}^p - {}^{\tau}\mathcal{E}_{mn}^C - {}^{\tau}\mathcal{E}_{mn}^{TH}) + {}^{\tau}s_{ij} {}^{\tau}\mathcal{E}_{ijcd}^E {}^{\tau}\mathcal{E}_{cd}^E - \frac{2}{3} {}^{\tau}\sigma_y \frac{\partial {}^{\tau}\sigma_y}{\partial {}^{\tau}\theta} {}^{\tau}\mathcal{E}^p}{\frac{4}{9} {}^{\tau}\sigma_y^2 \frac{\partial {}^{\tau}\sigma_y}{\partial {}^{\tau}\bar{\epsilon}^P} + {}^{\tau}s_{ij} {}^{\tau}C_{ijmn}^E {}^{\tau}s_{mn}} \quad (8)$$

la quale è funzione delle derivate  $\frac{\partial {}^\tau \sigma_y}{\partial {}^\tau \varepsilon^p}$  e  $\frac{\partial {}^\tau \sigma_y}{\partial {}^\tau \theta}$ .

Una relazione tra le grandezze  ${}^\tau \sigma_y$ ,  ${}^\tau \varepsilon^p$  e  ${}^\tau \theta$  può essere dedotta sperimentalmente tramite una serie di prove di trazione e/o compressione a diverse temperature. Con i risultati di tali prove, infatti, è possibile ottenere per le varie temperature curve ideali tensione-deformazione di tipo bilineare come mostrato in figura 2; sebbene la costruzione di tali curve sia piuttosto arbitraria [35, 36], per la loro determinazione è necessario riferirsi al range di deformazioni massime riscontrate nell'analisi oggetto di studio.

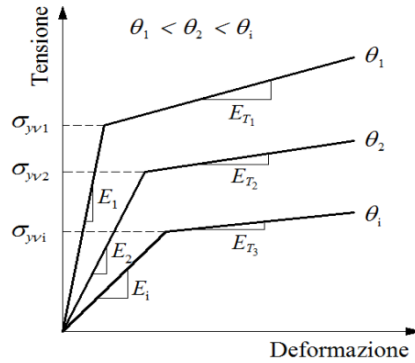


Figura 2: Curve bilineari tensione-deformazione.

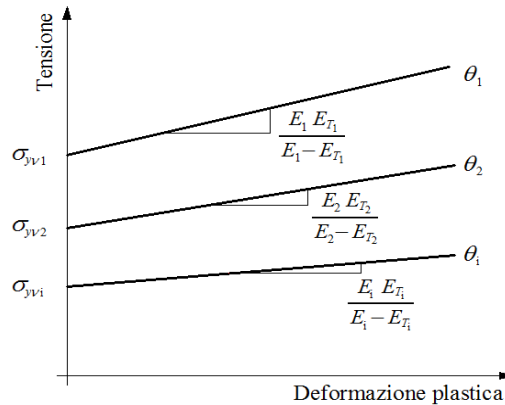


Figura 3: Legame tensione-deformazione plastica.

Per trasformare le curve bilineari di figura 2 in curve tensione-deformazione plastica si considerano incrementi di carico a temperatura costante. Ponendo  ${}^\tau \sigma = {}^\tau \sigma_y$  per  ${}^\tau \sigma > {}^\tau \sigma_{yv}$ , dove  ${}^\tau \sigma_{yv}$  è la tensione di snervamento del materiale vergine, dalla figura 2 si evince che:

$${}^\tau \sigma = {}^\tau \sigma_{yv} + {}^\tau E_T \left( {}^\tau \varepsilon - \frac{{}^\tau \sigma_{yv}}{{}^\tau E} \right) \quad (9)$$

$${}^\tau \varepsilon^p = {}^\tau \varepsilon - \frac{{}^\tau \sigma}{{}^\tau E} \quad (10)$$

le quali espressioni consentono di determinare il legame esistente tra tensione di snervamento

e deformazione plastica a temperatura costante e per carichi crescenti assialmente:

$${}^{\tau}\sigma_y = \frac{{}^{\tau}E {}^{\tau}E_T}{{}^{\tau}E - {}^{\tau}E_T} {}^{\tau}\varepsilon^P + {}^{\tau}\sigma_{yv}; \quad (11)$$

le curve descritte da tale equazione sono rappresentate in figura 3.

L'equazione (11) dedotta per carichi monoassiali si può estendere, senza commettere errori significativi, anche nel caso di carichi multiassiali. Supponendo, inoltre, che tale relazione continui a valere indipendentemente dall'evoluzione temporale della deformazione plastica efficace  ${}^{\tau}\bar{\varepsilon}^P$  si può scrivere:

$${}^{\tau}\sigma_y = \frac{{}^{\tau}E {}^{\tau}E_T}{{}^{\tau}E - {}^{\tau}E_T} {}^{\tau}\bar{\varepsilon}^P + {}^{\tau}\sigma_{yv}. \quad (12)$$

Derivando la precedente rispetto ad  ${}^{\tau}\bar{\varepsilon}^P$ , e rispetto alla temperatura  $\theta$ , si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^{\tau}\sigma_y}{\partial {}^{\tau}\bar{\varepsilon}^P} &= \frac{{}^{\tau}E {}^{\tau}E_T}{{}^{\tau}E - {}^{\tau}E_T}; \\ \frac{\partial {}^{\tau}\sigma_y}{\partial {}^{\tau}\theta} &= {}^{\tau}\bar{\varepsilon}^P \frac{\partial}{\partial {}^{\tau}\theta} \left( \frac{{}^{\tau}E {}^{\tau}E_T}{{}^{\tau}E - {}^{\tau}E_T} \right) + \frac{\partial {}^{\tau}\sigma_{yv}}{\partial {}^{\tau}\theta}. \end{aligned} \quad (13)$$

Al termine del processo di calcolo l'espressione della grandezza scalare  ${}^{\tau}\Lambda$  è:

$${}^{\tau}\Lambda = \frac{{}^{\tau}\mu {}^{\tau}s_{mn} \left( {}^{\tau}\alpha_{mn} - {}^{\tau}\alpha_{mn}^C - {}^{\tau}\alpha_{mn}^{TH} \right) + \frac{{}^{\tau}\mu}{2} {}^{\tau}s_{ij} {}^{\tau}\sigma_{ij}}{\left[ \frac{2 {}^{\tau}\sigma_y^2}{3} \left( {}^{\tau}\mu + \frac{1}{3} \frac{{}^{\tau}E {}^{\tau}E_T}{{}^{\tau}E - {}^{\tau}E_T} \right) \right]} + \frac{\frac{{}^{\tau}\sigma_y}{3} \left[ {}^{\tau}\bar{\varepsilon}^P \frac{\partial}{\partial {}^{\tau}\theta} \left( \frac{{}^{\tau}E {}^{\tau}E_T}{{}^{\tau}E - {}^{\tau}E_T} \right) + \frac{\partial {}^{\tau}\sigma_{yv}}{\partial {}^{\tau}\theta} \right]}{\left[ \frac{2 {}^{\tau}\sigma_y^2}{3} \left( {}^{\tau}\mu + \frac{1}{3} \frac{{}^{\tau}E {}^{\tau}E_T}{{}^{\tau}E - {}^{\tau}E_T} \right) \right]}. \quad (14)$$

Noto il valore di  ${}^{\tau}\Lambda$ , l'equazione (6) ci consente di determinare le singole componenti della velocità di deformazione plastica.

L'incrudimento cinematico del materiale, in condizioni isoterme, suppone che la dimensione della superficie di snervamento sia costante e che essa possa traslare come un corpo rigido nello spazio delle tensioni a nove dimensioni; tale traslazione rappresenta la misura dell'incrudimento: ad incrementi di deformazione plastica corrispondono incrementi di traslazione della superficie, i quali per semplicità di trattazione vengono considerati lineari.

Nell'ipotesi di essere in condizioni non isoterme, invece, sia l'incrudimento del materiale sia la superficie di snervamento dipendono dalla temperatura; sotto queste condizioni la funzione di plasticizzazione di Von Mises per incrudimento cinematico può essere scritta nella seguente forma:

$${}^{\tau}F = \frac{1}{2} \left( {}^{\tau}s_{lm} - {}^{\tau}\alpha_{lm} \right) \left( {}^{\tau}s_{lm} - {}^{\tau}\alpha_{lm} \right) - \frac{1}{3} {}^{\tau}\sigma_y^2 \quad (15)$$

dove:

- ${}^{\tau}\sigma_y = {}^{\tau}\sigma_y({}^{\tau}\theta)$  è la tensione di snervamento;
- ${}^{\tau}\alpha_{lm} = \int_0^{\tau} {}^{\tau}\dot{\alpha}_{lm} dt$  è la componente  $lm$  del tensore di traslazione della superficie di plasticizzazione;
- ${}^{\tau}\dot{\alpha}_{lm} = {}^{\tau}C {}^{\tau}\dot{\epsilon}_{lm}^p$  è la velocità di traslazione della superficie di plasticizzazione;
- ${}^{\tau}C = {}^{\tau}C({}^{\tau}\theta)$  è parametro di incrudimento.

Nell'espressione di  ${}^{\tau}\Lambda$  le uniche incognite sono  ${}^{\tau}C$  e  $\frac{\partial {}^{\tau}\sigma_y}{\partial {}^{\tau}\theta}$ .

Per la determinazione delle incognite suddette, allora, si procede in maniera analoga al caso di incrudimento isotropo; infatti, si considerano curve ideali di tensione-deformazione di tipo bilineare, come quelle riportate in figura 2, derivate sperimentalmente tramite una serie di prove di trazione e/o compressione a diverse temperature su provini del materiale, e si assume che la relazione esistente tra la tensione di snervamento  ${}^{\tau}\sigma_y$  e la temperatura  ${}^{\tau}\theta$  sia la stessa di quella tra la tensione di snervamento del materiale vergine e la temperatura, ossia si ipotizza l'uguaglianza tra  ${}^{\tau}\sigma_y$  e  ${}^{\tau}\sigma_{yv}$ .

Per valutare il parametro di incrudimento  ${}^{\tau}C$ , si ipotizza che la temperatura sia costante e che i carichi agiscano assialmente.

In definitiva si ha:

$${}^{\tau}C = \frac{2}{3} \frac{{}^{\tau}E {}^{\tau}E_T}{{}^{\tau}E - {}^{\tau}E_T} \quad (16)$$

il quale pertanto è funzione della temperatura  ${}^{\tau}\theta$ ; infatti, sia il modulo di Young  ${}^{\tau}E$ , che quello di incrudimento  ${}^{\tau}E_T$ , dipendono da  ${}^{\tau}\theta$ .

Infine, nota l'espressione di  ${}^{\tau}C$  e tenuto conto dei valori in precedenza definiti di  ${}^{\tau}\sigma_y$ ,  ${}^{\tau}C_{ijrs}^E$  e  ${}^{\tau}s_{ij}$  si dimostra che la grandezza scalare  ${}^{\tau}\Lambda$  vale:

$${}^{\tau}\Lambda = \frac{{}^{\tau}\mu ({}^{\tau}s_{mn} - {}^{\tau}\alpha_{mn}) ({}^{\tau}\dot{\epsilon}_{mn} - {}^{\tau}\dot{\epsilon}_{mn}^C - {}^{\tau}\dot{\epsilon}_{mn}^{TH}) + \frac{{}^{\tau}\mu}{2} ({}^{\tau}s_{ij} - {}^{\tau}\alpha_{ij}) {}^{\tau}\sigma_{ij} - \frac{{}^{\tau}\sigma_{yv}}{3} \frac{\partial {}^{\tau}\sigma_{yv}}{\partial {}^{\tau}\theta} {}^{\tau}\theta}{\frac{2}{3} {}^{\tau}\sigma_{yv}^2 \left( {}^{\tau}\mu + \frac{1}{3} \frac{{}^{\tau}E {}^{\tau}E_T}{{}^{\tau}E - {}^{\tau}E_T} \right)} \quad (17)$$

e sostituendo tale espressione nell'equazione (6), si riesce a determinare le singole componenti della velocità di deformazione plastica.

### 3.2 Creep

Per quanto concerne la fase viscosa del modello, la teoria classica del creep tempo-dipendente è stata sviluppata in modo analogo alla teoria della plasticità tempo-indipendente [37-40]. Per formulare un modello di creep multiassiale è necessario definire tre elementi:

- una legge di creep monoassiale;
- una legge di incrudimento;
- una legge di flusso.

La legge di creep monoassiale è una rappresentazione matematica del comportamento del materiale così come si osserva con prove di creep monoassiali, eseguite generalmente a carico

e a temperatura costante. La base per questa rappresentazione può essere empirica, fisica, o una combinazione di entrambe ed in generale ha la seguente forma:

$${}^{\tau}\varepsilon^C = {}^{\tau}A({}^{\tau}\sigma, {}^{\tau}\theta, \tau) \quad (18)$$

dove

- $\tau$  indica il tempo;
- ${}^{\tau}\varepsilon^C$  è il creep monoassiale;
- ${}^{\tau}\sigma$  è la tensione monoassiale;
- ${}^{\tau}\theta$  è la temperatura.

Esistono molte funzioni che rappresentano in modo appropriato il comportamento del creep monoassiale: in questo caso è stata utilizzata la legge di potenza (*power creep law*).

Per quanto riguarda la legge di incrudimento è stata usata la *strain hardening rule*, secondo la quale la velocità di deformazione da creep è funzione della tensione, della temperatura e della deformazione da creep, e si ottiene eliminando il tempo dall'equazione (18)

La scelta della legge di flusso per rappresentare il comportamento multiassiale è basata su alcune ipotesi riguardanti il comportamento della deformazione da creep; nel caso in cui:

- il materiale sia isotropo;
- la deformazione da creep sia incompressibile;
- non ci siano deformazioni da creep per carichi idrostatici;
- la velocità di deformazione sia un multiplo scalare del deviatore degli sforzi;

la velocità di deformazione si può esprimere, secondo la seguente legge di flusso:

$${}^{\tau}\mathcal{E}_{ij} = \frac{3}{2} \cdot \frac{{}^{\tau}\mathcal{E}}{{}^{\tau}\bar{\sigma}} \cdot {}^{\tau}s_{ij}, \quad (19)$$

con il seguente significato dei simboli:

- ${}^{\tau}\mathcal{E}_{ij}$  è la componente  $ij$  del tensore velocità di deformazione da creep;
- ${}^{\tau}\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot {}^{\tau}s_{ij} \cdot {}^{\tau}s_{ij}}$  è la tensione efficace di Von Mises;
- ${}^{\tau}s_{ij}$  è l'elemento  $ij$  del deviatore degli sforzi;
- ${}^{\tau}\mathcal{E}$  è la velocità di deformazione da creep efficace.

### 3.3 Applicabilità delle equazioni costitutive

Le equazioni costitutive del modello termo-elasto-plastico e di creep, trattate devono essere usate con cautela, e, soprattutto devono essere validate dal giudizio tecnico; infatti, si fondano sulle teorie classiche di plasticità e di creep per condizioni isoterme. Pertanto, presentano gli stessi limiti di applicabilità delle suddette teorie [28, 40-42].

È doveroso comunque fare le seguenti considerazioni.

- Le leggi di incrudimento cinematico e isotropo, per plasticità isoterma, risultano particolarmente appropriate per processi che comportano incrementi crescenti di carico proporzionali o quasi proporzionali, mentre cadono in difetto per storie di carico fortemente non proporzionali;
- Per condizioni isoterme e carichi ciclici, se si utilizza una sola curva tensione-deformazione, entrambi i modelli di incrudimento risultano poco attendibili. In particolare l'incrudimento cinematico per essere affidabile richiede moduli di incrudimento variabili con il numero di cicli di carico e nell'ipotesi di curve tensione-deformazione bilineari fornisce risultati abbastanza buoni solo per alcuni tipi di

materiale.

- Le equazioni costitutive del creep sono valide solo nel caso di cicli di carico proporzionali o quasi proporzionali.
- Tutte le raccomandazioni fin qui elencate, naturalmente, continuano a valere anche nell'ipotesi di termo-plasticità o di termo-plasticità e creep.
- Le equazioni costitutive della plasticità non sono raccomandate in tutte le situazioni in cui la tensione di snervamento è fortemente dipendente dalla velocità di carico.

#### 4 INDAGINE SPERIMENTALE

Al fine di determinare i parametri necessari per la definizione del modello costitutivo visco-elastoplastico usato nelle successive elaborazioni numeriche, è stata effettuata un'indagine sperimentale su un conglomerato bituminoso di tipo tradizionale per strati di usura, consistente in una serie di prove di “*creep statico*” e di “*compressione uniassiale*”.

##### 4.1 La miscela di conglomerato bituminoso oggetto d'analisi

Il conglomerato bituminoso preso in esame è costituito da una miscela tradizionale con inerti calcarei da impiegare in strati d'usura della pavimentazione stradale [43].

Aggregato grosso – Trattenuto al crivello UNI n°5		
	Valore	Norma di riferimento
Coefficiente di forma Cf	2,10	EN 933-3:1997 EN 933-4:1997
Coefficiente di appiattimento Ca	1,54	
Indice di forma	1,25%	
Perdita in peso Los Angeles (L.A.)	20,7%	EN 1097-2:2003
Micro Deval Umida	6,9%	EN 1097-1:2003
Coefficiente di frantumazione	113	C.N.R. – Fascicolo n°4/35
Coefficiente Levigabilità	0,39	EN 1097-8
Sensibilità al gelo	1,30%	EN 1367-6
Spogliamento	0%	C.N.R. – B. U. n° 138/92
Porosità	0,72%	C.N.R. – B. U. n° 65/78

Tabella 1: Legame tensione-deformazione plastica.

Aggregato fino e Filler – Passante al crivello UNI n°5		
	Valore	Norma di riferimento
Equivalentente in sabbia	89%	EN 933- 8
Indice di plasticità	NP	C.N.R. UNI – 10014
<i>Filler</i> Vuoti Rigden	31,30%	EN 1097-4
<i>Filler</i> Potere rigidificante con filler/bitume = 1,5	10°C ΔPA	EN 13179

Tabella 2: Caratteristiche fisiche del passante al crivello UNI n°5.

Le caratteristiche degli aggregati della miscela sono riportate nelle Tabelle 1 e 2; per il confezionamento della miscela è stato utilizzato un legante “tal quale” del tipo 50/70, le cui principali caratteristiche fisiche e reologiche sono riassunte in tabella 3.

Le caratteristiche compositive sono riportate nella tabella 4, nella quale viene mostrato sia

il fuso di prescrizione per strati di usura, che la curva granulometrica scelta per il confezionamento della miscela.

Legante		
	Valore	Norma di riferimento
Duttilità a 25°C	> 100 mm	EN 13589:2008
Densità a 25°C	1.03 g/cm <sup>3</sup>	EN 15326:2007
Penetrazione a 25°C	64 dmm	EN 1426:2007
Punto di rammollimento (PA)	47°C	EN 1427:2007
Punto di rottura Fraass	- 8°C	EN 12593:2001
Viscosità dinamica a 160°C	0.035 Pas	EN 12595:2001

Tabella 3: Caratteristiche fisiche e reologiche.

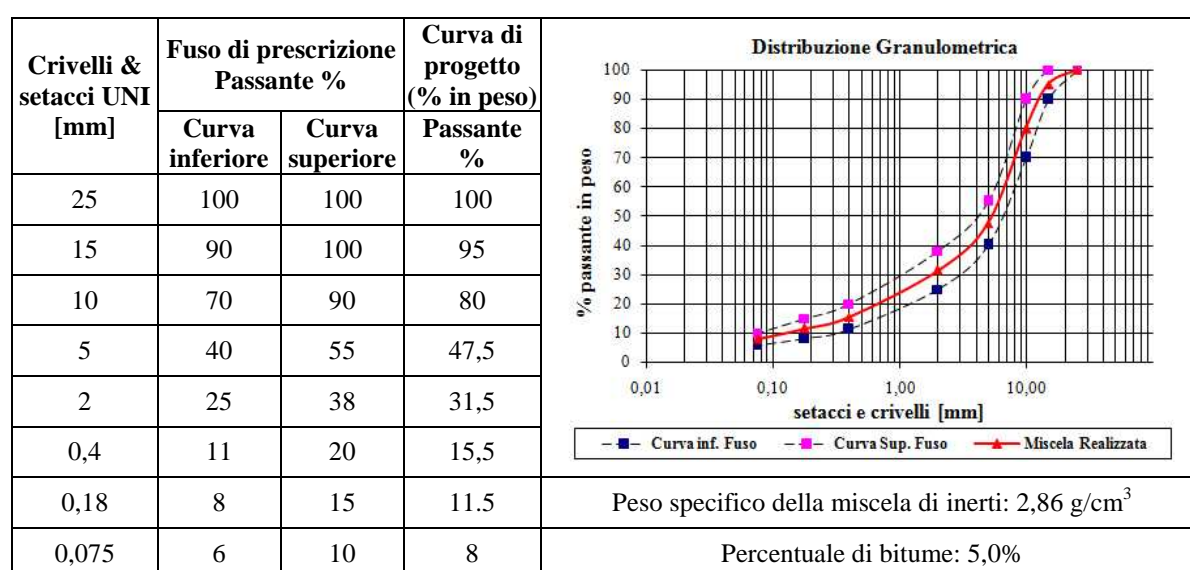


Tabella 4: Fuso granulometrico di prescrizione e curva di progetto.

#### 4.1 La miscela di conglomerato bituminoso oggetto d'analisi

Per la valutazione del comportamento reologico del conglomerato bituminoso oggetto di studio è stata realizzata una serie di prove di creep statico uniassiale. La prova consiste nel sottoporre le due basi di un provino cilindrico, avente altezza di 200 mm e diametro di 105 mm, ad uno sforzo normale centrato di ampiezza costante per un dato periodo di tempo e per fissata temperatura, e nel misurare le deformazioni longitudinali da esso subite sia nella fase di carico (500 sec) che in quella di scarico (1500 sec).

I provini sono stati confezionati in modo da ottenere una densità pressoché costante, non inferiore all'98% della densità Marshall, che nel caso in questione vale 2,47 kg/cm<sup>3</sup>, ed è stata raggiunta una percentuale di vuoti media del 4,65%.

Al fine di accentuare la componente plastica della deformazione, le prove di creep sono state eseguite ad una temperatura di 40°C ed a 5 differenti livelli tensionali, così come mostrato in tabella 5.

I risultati delle prove sono sintetizzati nei diagrammi tempo-deformazione riportati in figura 4, dalle quali è possibile distinguere i vari aspetti del comportamento reologico del materiale.

Prova	Temperatura [°C]	Tensione assiale [N/mm <sup>2</sup> ]
A	40	0,08
B	40	0,10
C	40	0,13
D	40	0,25
E	40	0,30

Tabella 5: Temperatura di prova e carichi applicati.

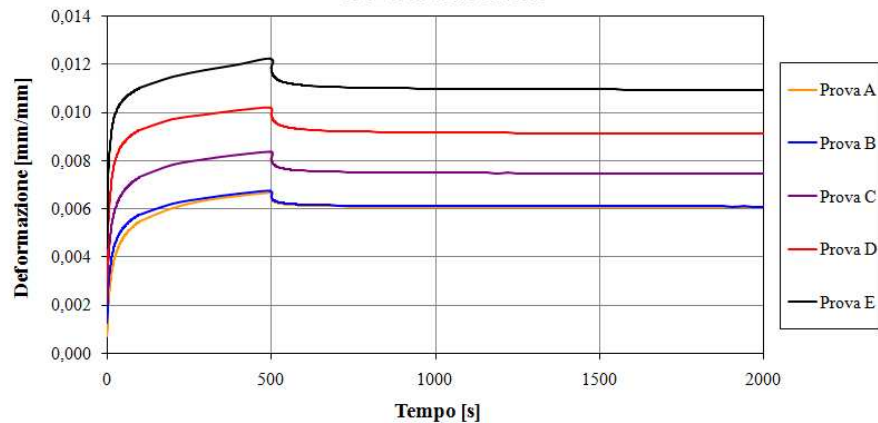


Figura 4: Curve sperimentali tempo-deformazione.

Nella fase di carico i provini manifestano un comportamento elasto-viscoplastico, mentre nella fase di scarico l'andamento della curva è determinato solo dal comportamento viscoelastico; la deformazione irreversibile è legata ai fenomeni di plasticizzazione sviluppati durante la fase di carico.

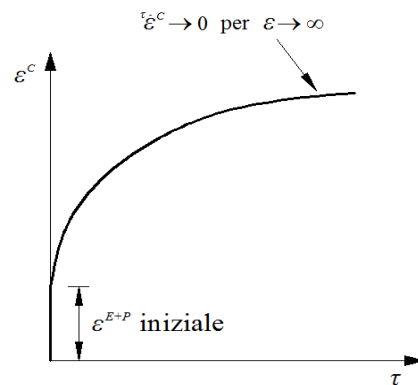


Figura 5: Legge di potenza (*power creep law*).

Come già accennato nel par. 3.2, il modello costitutivo usato nelle elaborazioni numeriche per la caratterizzazione analitica della deformazione da creep impiega la legge di potenza (*power creep law* – Figura 5), la cui espressione matematica è la seguente:

$$\tau \epsilon^C = \tau \epsilon^{VE} + \tau \epsilon^{VP} = a_0 \cdot \tau \sigma^{a_1} \cdot \tau^{a_2} \quad (20)$$

dove

- $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  sono parametri dipendenti dalla temperatura;
- $\tau \sigma$  è la tensione monoassiale;



–  $\tau$  è la variabile tempo.

Per ogni singola prova di creep è quindi necessaria l'individuazione di tre parametri ( $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$ ) desunti direttamente dai dati sperimentali; in particolare, come già accennato, essendo la fase di scarico rappresentativa solo del comportamento viscoelastico, per la caratterizzazione reologica della miscela è stata utilizzata la prima parte delle curve di creep, cioè quella di carico (Figura 6).

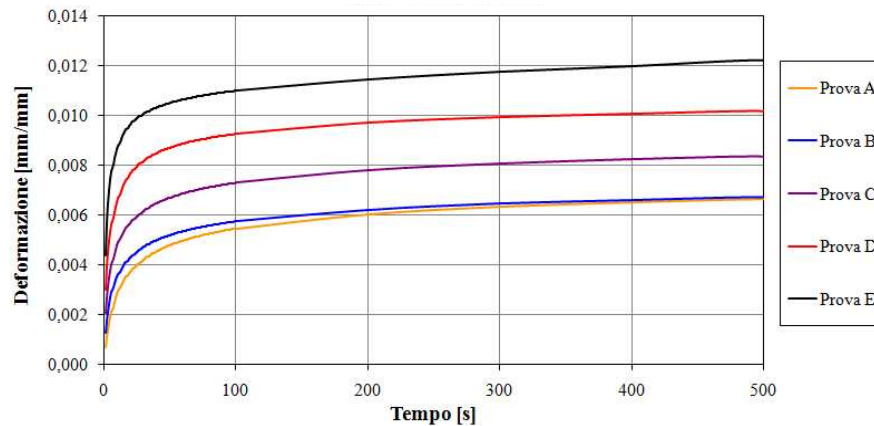


Figura 6: Fase di carico delle curve sperimentali tempo-deformazione.

Derivando rispetto al tempo l'eq. (20), assumendo costante la tensione, risulta:

$$\dot{\epsilon} = a_0 \cdot a_2 \cdot \sigma^{a_1} \cdot \tau^{a_2-1} \quad (20)$$

Si osservi che la legge di potenza presuppone che la velocità di deformazione decresca continuamente con il tempo (fig. 5); pertanto la legge di creep utilizzata non è idonea a rappresentare né il creep secondario, il quale è caratterizzato da una velocità di deformazione costante, né tantomeno quello terziario, che comunque non è preso in considerazione nella presente lavoro.

Si dimostra che nel caso in cui per il creep si impiega l'equazione (20), la velocità di deformazione da creep efficace è data relazione

$$\dot{\epsilon} = a_2 a_0 \sigma^{a_1} \tau^{a_2-1} \quad (21)$$

Per la determinazione dei parametri  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$ , poiché nelle prove di creep il provino è soggetto ad uno sforzo normale costante con  $\sigma_z$  unica componente di tensione diversa da zero, è opportuno particolarizzare l'espressione (19) con riferimento ad un stato di tensione di tipo monoassiale.

Il deviatore degli sforzi in questo caso è uguale a:

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_0 \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_z}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma_z}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sigma_z \end{pmatrix}, \quad (22)$$

nella quale

–  $\underline{\underline{\sigma}}$  è il tensore rappresentativo dello stato di tensione nel provino;

- $\sigma_0 = \frac{\sigma_z}{3}$  è la tensione media nel punto;
- $\underline{\underline{I}}$  è la matrice identità;

da cui deriva che la tensione efficace risulta pari proprio alla tensione applicata:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \left[ \left( -\frac{\sigma_z}{3} \right) \cdot \left( -\frac{\sigma_z}{3} \right) + \left( -\frac{\sigma_z}{3} \right) \cdot \left( -\frac{\sigma_z}{3} \right) + \left( \frac{2}{3} \sigma_z \cdot \frac{2}{3} \sigma_z \right) \right]} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{9} \sigma_z^2} = \sigma_z. \quad (23)$$

Considerato che la componente del deviatore degli sforzi  ${}^{\tau}S_{ij}$  lungo l'asse z vale  $\frac{2}{3}\sigma_z$ , la velocità di deformazione viscosa assume la seguente forma:

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_z = a_2 a_0 \bar{\sigma}^{a_1} t^{a_2-1}, \quad (24)$$

da cui integrando si ottiene:

$$\epsilon_z^C = a_0 \bar{\sigma}^{a_1} t^{a_2} = a_0 \sigma_z^{a_1} t^{a_2}, \quad (25)$$

Per ogni singola prova di creep si è, quindi proceduto alla determinazione dei valori numerici da assegnare alle costanti  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  mediante la metodologia proposta da Lux e Heusermann [44] basata sulla regressione non lineare della (25) scritta in forma semplificata:

$$\epsilon_z^C = a^* t^{a_2}, \quad \text{con } a^* = a_0 \sigma_z^{a_1}. \quad (26)$$

E' opportuno evidenziare che la regressione del dato sperimentale deve essere eseguita depurando le curve tempo-deformazione totale (fig. 6), ottenute sperimentalmente, dalle componenti di deformazione elastica e plastica istantanea, le cui entità sono direttamente deducibili dalle curve sperimentali relative alle fasi di carico e scarico riportate in figura 4, ovvero:

$${}^{\tau}\epsilon^C = {}^{\tau}\epsilon - (\epsilon^E + \epsilon^P). \quad (27)$$

In figura 7 sono, quindi, riportate le curve sperimentali tempo-deformazione dovute alla sola deformazione da creep; da esse sono stati dedotti i parametri della legge di potenza relativi ad ognuna delle prove eseguite, i cui valori numerici sono riportati in tabella 6.

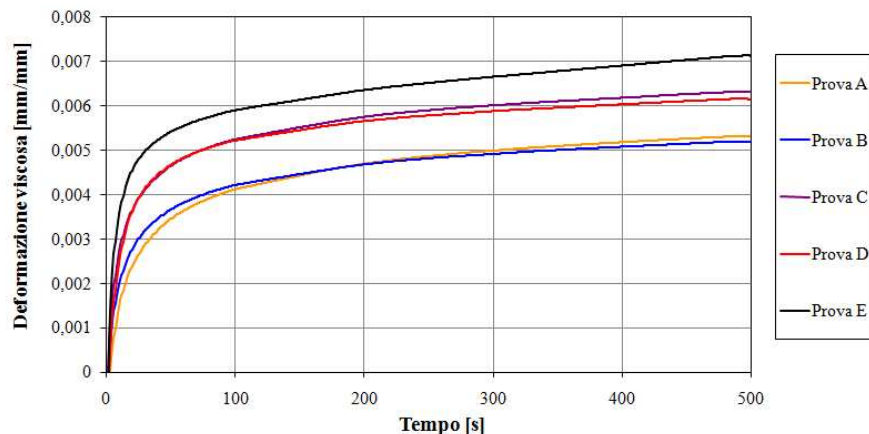


Figura 7: Curve tempo-deformazione dovute alla sola deformazione da creep.

Prova	$a_0$	$a_1$	$a_2$
-------	-------	-------	-------

A	0,414	2,244	0,218
B	0,323	2,269	0,182
C	0,224	2,228	0,162
D	0,032	1,866	0,154
E	0,023	1,718	0,144

Tabella 6: Parametri caratteristici del materiale.

## 4.2 Prove di compressione uniassiale

Al fine di definire il comportamento elasto-plastico del conglomerato bituminoso due provini cilindrici, dello stesso tipo di quelli usati per le prove di creep, sono stati sottoposti a prova di compressione monoassiale attraverso una pressa ad aria compressa tipo CTM/60 munita di banco di contrasto in acciaio (fig. 8).



Figura 8: Pressa CTM/60.

Entrambe le prove sono state eseguite alla temperatura di 40 °C portando il provino a rottura con una velocità di deformazione pari a 0,00167 mm/s.

In figura 9 sono riportati i diagrammi deformazione-tensione relativi alle prove eseguite. E' opportuno osservare che non appena il provino viene caricato si ottiene una risposta visco-elastica, pressoché immediata, difficilmente apprezzabile dalla macchina alle alte temperature a causa della sovrapposizione di microcedimenti dovuti all'iniziale riassetto degli aggregati in corrispondenza delle superfici di contatto con le piastre di carico e contrasto. I meccanismi deformativi sopra citati, almeno nell'ambito della sperimentazione condotta, si estendono in tutto il campo della visco-elasticità lineare ( $[2\div 3] \times 10^{-4}$ ), e pertanto, una volta esauriti il comportamento del materiale può essere già considerato in fase plastica.

Subito dopo la fase sopra descritta i diagrammi di figura 8 possono essere suddivisi in 4 zone. Nella prima zona il comportamento del conglomerato è dominato dalla viscoelasticità del legante, e, di conseguenza, le curve deformazione-tensione mostrano una bassa rigidità assiale del provino (*softening behavior*). In questa zona le particelle solide subiscono mutui scorrimenti visco-plastici via via crescenti che danno origine ad un meccanismo di addensamento dello scheletro solido con conseguenziale riduzione del volume dei vuoti.

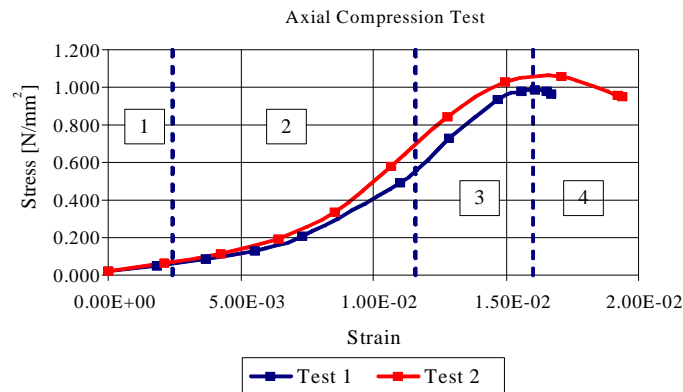


Figura 9: Prova di compressione monoassiale.

L'inizio della zona 2 indica l'insorgenza di mutue interazioni tra i grani dovute alla riorganizzazione per addensamento dello scheletro solido (*interlocking of aggregate particles*). Con il progredire del suddetto meccanismo deformativo si registra, quindi, un incremento di rigidità della miscela (*hardening behavior*). Nella zona 3 il grado di interconnessione tra i grani (*aggregate interlocking*) degrada lentamente con l'aumentare del carico. In corrispondenza del punto di massimo della curva, il progressivo incremento del livello tensionale, così come mostrato dall'andamento decrescente delle tensioni nella zona 4, produce la rottura dei meccanismi di resistenza a taglio tra i grani dello scheletro solido; venendo meno l'ammorsamento tra le particelle solide e con l'accumularsi di microlesioni all'interfaccia legante inerte, i grani sfuggiranno gli uni dagli altri fino al collasso del provino per eccesso di deformazione [45-51].

I risultati delle prove di compressione monoassiale sono state usate per determinare i parametri della formulazione costitutiva adoperata nelle elaborazioni numeriche, ovvero il Modulo di elasticità ( $E$ ), il Modulo di incrudimento ( $E_T$ ) e la tensione di snervamento ( $\sigma_y$ ).

La formulazione costitutiva presa in esame, basata sul criterio di plasticizzazione di Von Mises con legge di incrudimento isotropo (figura 10), schematizza la componente elasto-plastica della deformazione facendo riferimento a un diagramma convenzionale di calcolo  $\epsilon$ - $\sigma$  di tipo bilineare (figura 2).

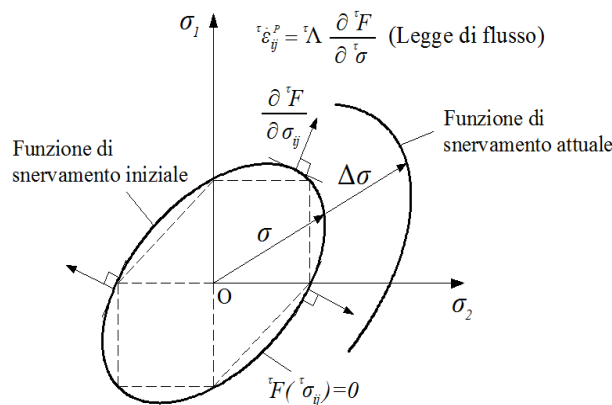


Figura 10: Incrudimento isotropo e legge di flusso plastico.

Come si può osservare, raggiunta la soglia di snervamento del materiale, non si hanno più solo deformazioni elastiche, ma anche deformazioni plastiche.

Per la definizione numerica dei parametri elasto-plastici da utilizzare come dati di input per

la successiva fase di simulazione numerica, si rende quindi necessario approssimare le curve sperimentali deformazione-tensione riportate in figura 9 con una spezzata composta da due rami, di cui il primo è rappresentativo del comportamento elastico, mentre il secondo di quello plastico.

Come già anticipato, le prove sperimentali eseguite non hanno consentito, per limiti strumentali, di acquisire la deformazione elastica del provino; il Modulo di elasticità “ $E$ ” è stato, quindi, assunto sulla base di dati riscontrati in letteratura tecnica per condizioni analoghe di prova: considerando un limite di deformazione elasticità  $\varepsilon_0=1,2 \times 10^{-5}$  (tale da rimanere sicuramente nel campo della visco elasticità lineare) e un valore di tensione di snervamento pari a  $\sigma_y=0,020 \text{ N/mm}^2$  [González, 2007], ne deriva un valore del modulo di elasticità pari ad  $E = 1666,667 \text{ N/mm}^2$ .

Così come mostrato in figura 11, il modulo di incrudimento del conglomerato, per la prova  $i$ -esima ( $E_{Ti}$ ), è stato determinato tramite regressione lineare dei dati sperimentali.

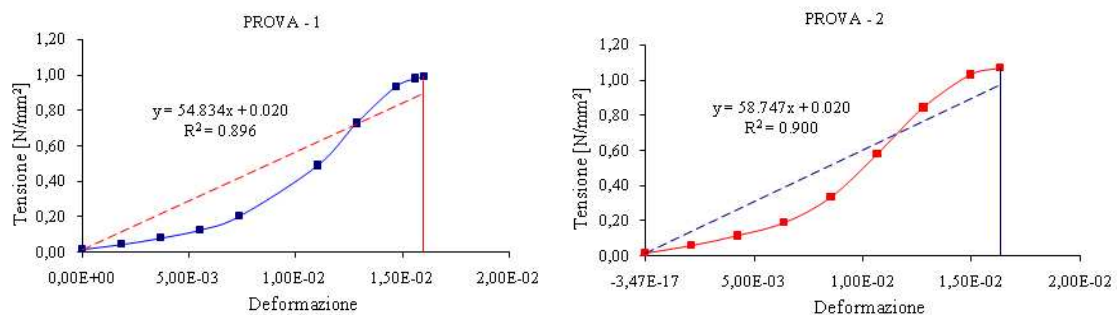


Figura 11: Determinazione di  $E_T$  per le prove di compressione 1 e 2.

Essendo il modulo di incrudimento coincidente con il valore della pendenza della retta di regressione si ottiene:

- prova 1  $\rightarrow E_{T1} = 54,834 \text{ N/mm}^2$ ;
- prova 2  $\rightarrow E_{T2} = 58,747 \text{ N/mm}^2$ .

Quale valore (di prima approssimazione) del modulo di incrudimento del materiale si è, quindi, assunto il valore medio:  $E_T = 56,791 \text{ N/mm}^2$ .

Infine, il coefficiente di Poisson è stato determinato tramite la relazione proposta da Erkens [45]:

$$\nu = 0,0027T - 0,49. \quad (28)$$

dove  $T$  è temperatura espressa in gradi Kelvin; per una temperatura di  $40^\circ\text{C}$  l’eq. (28) fornisce un valore di  $\nu = 0,35$ .

## 5 MODELLAZIONE NUMERICA

Al fine di simulare numericamente il comportamento meccanico del conglomerato bituminoso durante la prova di creep statico, è stato sviluppato un modello FEM 3D con l’ausilio del codice di calcolo ADINA.

Il modello è stato calibrato sulla base di una procedura iterativa basata sul confronto diretto tra le misure di deformazione ricavate sperimentalmente e quelle ottenute dalle simulazioni numeriche.

## 5.1 Descrizione del modello FEM

Il provino cilindrico di conglomerato bituminoso usato per le prove di creep statico, avente altezza di 200 mm e diametro di 105 mm, è stato modellato ricorrendo a una mappatura regolare di elementi 3D-solid di forma tetraedrica; in particolare sono stati utilizzati 2700 elementi finiti e 561 nodi (figura 12). Ogni elemento è definito da 4 nodi, ciascuno dei quali presenta 3 DOF (*degree of freedom*), corrispondenti agli spostamenti lungo i tre assi coordinati.

Per la definizione del legame costitutivo del materiale è stato utilizzato il modello “*creep-thermo-plastic*” presente nelle librerie del software ADINA, il quale implementa il modello costitutivo descritto nel paragrafo 3.

Il modello FEM messo a punto simula le condizioni al contorno cinematiche e meccaniche a cui è sottoposto il provino cilindrico di conglomerato bituminoso all’interno della cella di carico della macchina di creep durante il test. In tal senso i nodi della faccia inferiore sono stati vincolati in modo da impedire le traslazioni verticali, mentre la pressione verticale di prova è stata applicata sulla faccia superiore attraverso la definizione di una funzione temporale di carico; su tutto il volume del modello è stato imposto in carico termico costante nel tempo di 40 C° (figura 12).

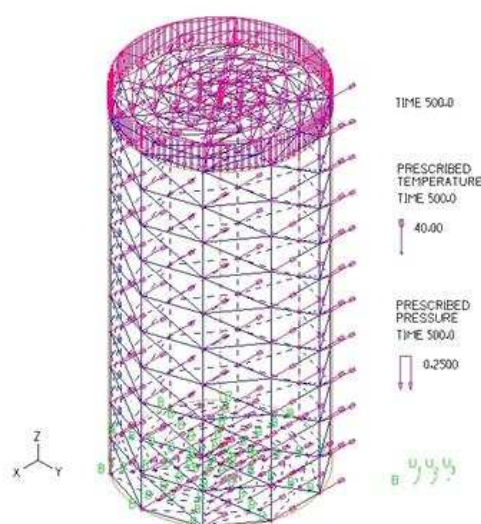


Figura 12: Mesh, schema di carico e condizioni al contorno.

Così come meglio descritto nel successivo paragrafo, sia l’individuazione della funzione di carico, sia la calibrazione del modello FEM proposto, sono state effettuate mediante delle simulazioni a spostamento imposto, imponendo cioè al modello FEM l’abbassamento subito dal provino di conglomerato bituminoso durante la fase di carico delle prove sperimentali eseguite.

Per la risoluzione del modello è stata condotta un’analisi di tipo dinamico non lineare; in tal senso la fase di carico delle curve di creep, avente una durata 500 secondi, è stata modellata tramite l’integrazione al passo di 2500 step temporali aventi ampiezza 0,2 s.

## 5.2 Calibrazione del modello

La formulazione costitutiva usata per definire il comportamento meccanico del conglomerato bituminoso richiede l’individuazione dei seguenti parametri:  $\sigma_y$  (*tensione di snervamento*);  $E_T$  (*modulo di incrudimento*);  $E$  (*modulo di Young*);  $a_0$ ,  $a_1$  ed  $a_2$  (parametri



della legge di creep);  $\rho$  (densità);  $\nu$  (coefficiente di Poisson).

Così come meglio descritto nei paragrafi 4.1 e 4.2, i valori di prima approssimazione del modulo di incrudimento e dei parametri della legge di creep da usare all'inizio della procedura di calibrazione del modello sono desunti direttamente dai dati sperimentali delle prove di compressione uniassiale (tab. 7) e di creep statico (tab 8).

$\sigma_y$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$E$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$E_T$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\nu$
0,020	1666,667	56,791	0,35

Tabella 7: Parametri elasto-plastici e coefficiente di Poisson.

Prova	$a_0$	$a_1$	$a_2$
Prova A	0,414	2,244	0,218
Prova B	0,323	2,269	0,182
Prova C	0,224	2,228	0,162
Prova D	0,032	1,866	0,154
Prova E	0,023	1,718	0,144

Tabella 8: Parametri della legge di creep.

La procedura seguita per calibrare il modello FEM, può essere sintetizzata attraverso il seguente diagramma di flusso riportato in figura 13.

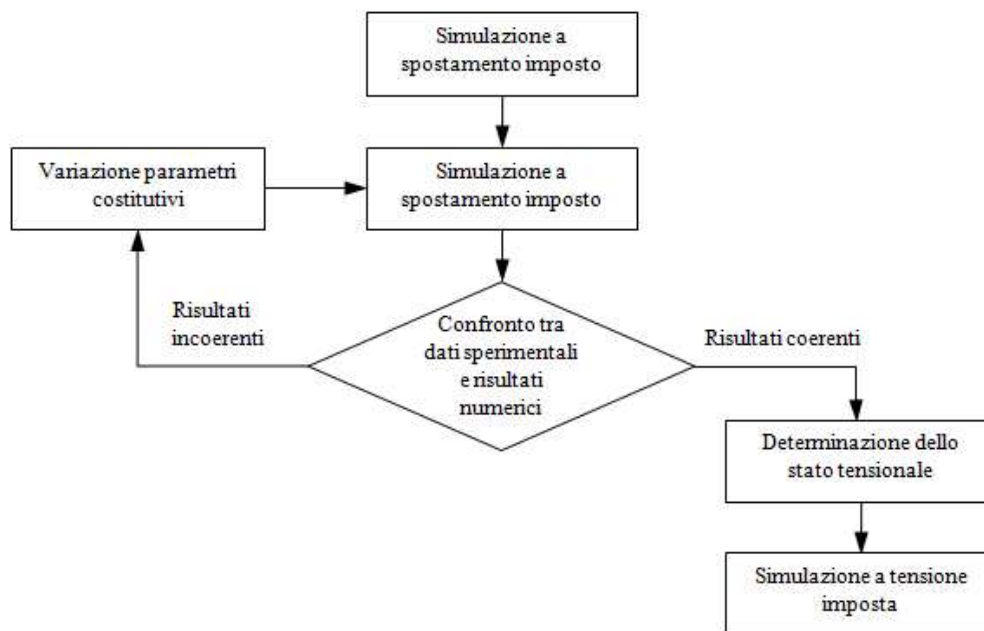


Figura 13: Procedura di calibrazione dei modelli FEM.

La simulazione a spostamento imposto consiste nell'applicare al modello FEM del provino cilindrico i cedimenti  $\delta(\tau)$  subiti istante per istante dal provino durante la fase di carico delle prove sperimentali di creep eseguite a dato livello tensionale; durante la suddetta simulazione numerica al modello viene, inoltre applicato un carico termico costante di 40 °C.

In tabella 9 sono riportati i valori finali dei cedimenti a  $\tau = 500$  secondi.

L'andamento temporale delle deformazioni totali, plastiche e viscosi, calcolate come media delle deformazioni ottenute in corrispondenza degli elementi tetraedrici disposti lungo l'asse longitudinale baricentrico AB del modello (Fig. 14), sono quindi confrontati con i dati

sperimentali ottenuti dalle prove di laboratorio.

Prove	$\delta_{max}$ [mm]
Prova A	1,332
Prova B	1,346
Prova C	1,673
Prova D	2,039
Prova E	2,445

Tabella 9: Cedimenti a  $\tau = 500$  secondi.



Figura 14: Elementi tetraedrici disposti lungo l'asse diametrale A-B del modello (sezione diametrale).

In figura 15 sono riportati i dati sperimentali relativi alla prova di creep D ed i relativi risultati numerici ottenuti dalla simulazione di primo tentativo: si può osservare come la deformazione numerica plastica sia sovrastimata, discostandosi in modo significativo da quella sperimentale, mentre quella viscosa è di poco sottostimata.

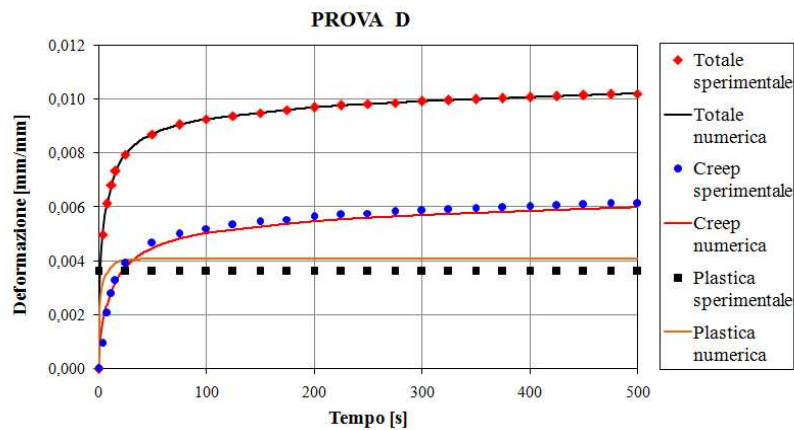


Figura 15: Simulazione numerica di primo tentativo a spostamento imposto - Prova D.

Non essendo il risultato della simulazione coerente con i dati di laboratorio, si rende necessario, pertanto, modificare i parametri iniziali forniti al codice di calcolo come dati di input. La procedura di calibrazione, infatti, consiste proprio nella ricerca, a partire dai valori di primo tentativo, dei parametri “*corretti*” che consentono di riprodurre con errori trascurabili i dati sperimentali. L’operazione di taratura del modello è stata quindi effettuata apportando



delle correzioni ai parametri elasto-plastici, i quali sono quelli affetti da un maggior grado di approssimazione. In particolare, si è ritenuto opportuno modificare rispetto ai valori numerici di primo tentativo il solo modulo di incrudimento  $E_T$ , essendo il parametro più sensibile ai fini del calcolo della deformazione plastica. La formulazione costitutiva presa in esame, come già ampiamente discusso, descrive, infatti, la componente elasto-plastica della deformazione facendo riferimento a un diagramma tensione-deformazione di tipo bilineare. Esso, nell'ipotesi di carichi costanti o crescenti assialmente a temperatura costante, può essere a sua volta trasformato in un diagramma lineare *tensione-deformazione plastica* (figura 3) di equazione:

$$\tau\sigma = \frac{\tau E \tau E_T}{\tau E - \tau E_T} \tau\epsilon^P + \tau\sigma_{yv} \quad (29)$$

L'espressione (29) implica, quindi, che la deformazione plastica è calcolata tramite la relazione:

$$\tau\epsilon^P = \frac{\tau\sigma - \tau\sigma_{yv}}{\frac{\tau E \tau E_T}{\tau E - \tau E_T}} = \frac{\Delta\tau\sigma}{\tau E^*} \quad (30)$$

e pertanto  $\tau\epsilon^P$  dipende dai coefficienti costitutivi  $\sigma_y$ ,  $E$ ,  $E_T$ , e dalla tensione applicata  $\sigma$ ; è opportuno però osservare che è proprio il modulo di incrudimento il fattore di maggiore peso.

Ancora con riferimento alla prova D, il modello è stato calibrato mediante alcune simulazioni di tentativo eseguite incrementando gradualmente il modulo  $E_T$  a partire dal suo valore iniziale di  $56,791 \text{ N/mm}^2$ .

Risultati più che soddisfacenti sono stati ottenuti in corrispondenza di un valore del modulo di incrudimento pari a  $67,00 \text{ N/mm}^2$ . Come si può osservare dalla figura 16, infatti, la deformazione plastica simulata praticamente coincide con quella sperimentale, mentre, vi è una piccola discrepanza tra la deformazione viscosa sperimentale e quella numerica, che, seppure di poco, risulta sovrastimata. Una migliore approssimazione nella stima di tale deformazione, verosimilmente, si può ottenere attraverso una determinazione più accurata dei parametri  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$ .

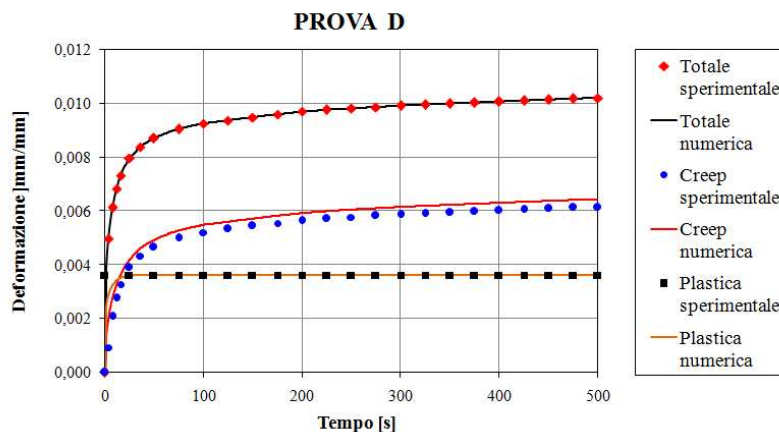


Figura 16: Simulazione numerica a spostamento imposto - Prova D.

Le simulazioni a spostamento imposto, necessarie per tarare il modello, consentono, inoltre, di determinare lo stato di tensione che si genera all'interno del provino. Tali pressioni,

valutate come media delle tensioni sugli elementi tetraedrici disposti lungo l'asse baricentrico longitudinale del provino (figura 14), e definite in funzione del tempo di avanzamento della prova, costituiscono la legge di carico utilizzata, poi, per schematizzare il carico di prova nella seconda fase "simulazioni a tensione imposta" (Figura 17).

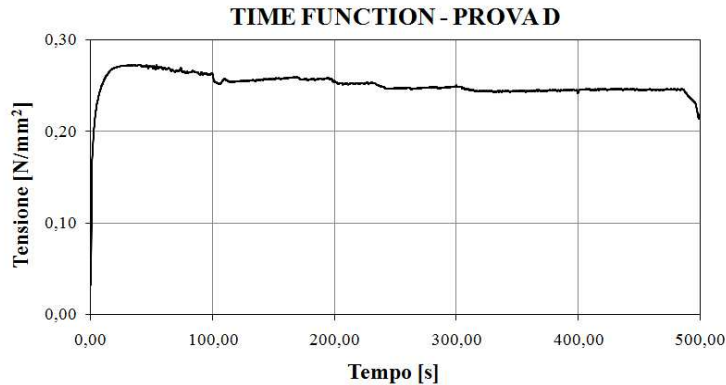


Figura 17: Funzione di carico relativa alla prova D.

È opportuno altresì osservare che il valore mediamente assunto nel tempo della funzione di carico è pari a  $0,25 \text{ N/mm}^2$ , e tale valore risulta proprio coincidente con la tensione di carico della prova di creep D; tale circostanza, come si vedrà nel seguito, si verifica anche in tutte le altre prove.

Procedendo allo stesso modo per tutte le prove è stato possibile ricavare le *funzioni di carico* e i valori di  $E_T$  "corretti", i quali costituiscono i nuovi dati di input per le "simulazioni a tensione imposta" (tab. 10).

Prova	$E_T$ [N/mm2]	Variazione relativa rispetto al valore iniziale [%]
Prova A	60,00	+5,65
Prova B	67,00	+18,00
Prova C	68,00	+19,74
Prova D	67,00	+18,00
Prova E	66,50	+17,10
$Var(\%) = \frac{E_T^{(i)} - E_T^{(f)}}{E_T^{(i)}} \cdot 100$		$E_T^{(i)}$ = Valore iniziale $E_T^{(f)}$ = Valore finale

Tabella 10: Parametri della legge di creep.

Per ognuna delle prove di creep considerate la procedura di calibrazione è stata completata (*simulazione a tensione imposta*) riproducendo numericamente la relativa fase di carico e confrontando, infine, i risultati numerici con quelli sperimentali; a tal fine sul modello FEM del provino, oltre al carico termico costante di  $40^\circ\text{C}$ , è stata applicata la pressione verticale di compressione (funzione di carico) ottenuta nella precedente fase della calibrazione (fig. 17).

In figura 18 e 19 sono messi a confronto i risultati numerici e sperimentali nel caso delle prove di creep D ed E.

L'errore  $\psi$  commesso nelle elaborazioni numeriche è stato valutato calcolando per ognuna delle singole componenti di deformazione (totale, creep e plastica) lo scostamento percentuale tra il dato numerico e quello sperimentale. In tal senso in tabella 11, per ognuna delle prove studiate, sono riportate le variazioni percentuali  $\Delta\psi$  valutate come valore medio degli errori

ottenuti negli ultimi 50 secondi di prova.

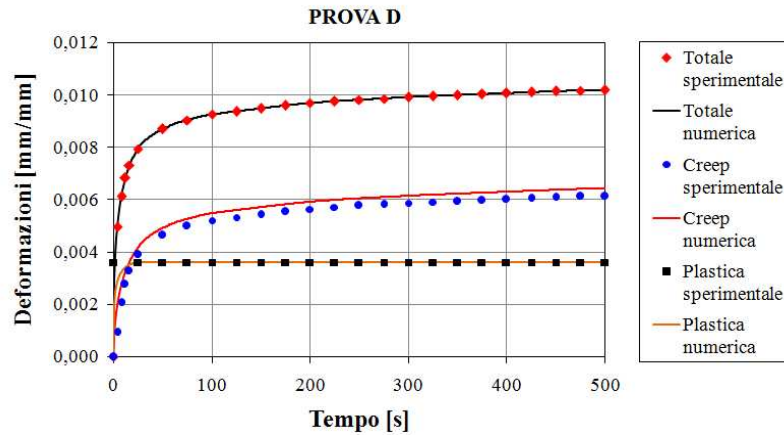


Figura 18: Simulazione numerica a tensione imposta - Prova D.

Prova	$\Delta\Psi_{TOTALE}$ [%]	$\Delta\Psi_{CREEP}$ [%]	$\Delta\Psi_{PLASTICA}$ [%]
A	+0,03	+4,60	+0,58
B	+0,07	+4,72	+0,83
C	+0,05	+4,98	+1,96
D	+0,05	+4,70	+0,10
E	+0,01	+5,99	-0,20

Tabella 11: Errori percentuali commessi nelle varie simulazioni.

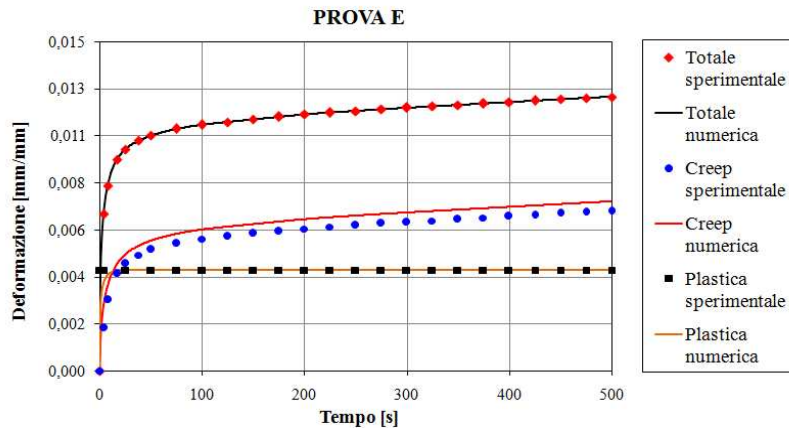


Figura 19: Simulazione numerica a tensione imposta - Prova E.

## 6 CONCLUSIONI

La valutazione delle criticità del comportamento meccanico dei conglomerati bituminosi in ambito stradale storicamente è stata demandata ad indagini di laboratorio e soprattutto a rilevazioni in vera grandezza dei degni occorsi alla pavimentazione.

Con entrambi i due tipi di investigazioni si rinuncia parzialmente alla definizione dei parametri meccanici tipici della scienza delle costruzioni, preferendo un approccio legato a considerazioni di natura empirico-meccanicistica.

Il presente lavoro, basato su prove di creep e di compressione uniassiale in stato plastico,

ha inteso determinare, invece, tutte quelle grandezze da implementare su un codice di calcolo FEM, impostato sul modello di Lytton, al fine poi di pervenire alla caratterizzazione del comportamento elasto visco-plastico del conglomerato bituminoso.

Tale tipo di approccio viene ritenuto efficace, poiché sulla base di prove non particolarmente onerose, è possibile individuare il processo fondamentale di transizione nel campo tenso-deformativo del materiale, mediante elaborazione agli elementi finiti, con notevole risparmio di tempi e di risorse, in genere assai ingenti, che contraddistinguono l'approccio più seguito nella scienza stradale.

I risultati ottenuti mostrano una buona concordanza tra modello numerico e dato sperimentale della prova di creep statico.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] G.R. Chehab, Y.R. Kim, R.A. Schapery, M.W. Witzack and R. Bonaquist, *Characterization of Asphalt Concrete in Uniaxial Tension Using a Viscoelastoplastic Model*, Presented at the Association of asphalt Paving Technologist 78th Annual Meeting (CD ROM), Lexington, KY. (2003).
- [2] W.F. Chen and D.J. Han, *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, New York (1988).
- [3] P. Perzyna, "Fundamental Problems in Viscoplasticity", *Advances in Applied Mechanics*, **9**, 243-377 (1966).
- [4] A. Scarpas, R. Al-Khoury, C. Van Gurp and S.M. Erkens, *Finite Element Simulation of Damage Development in Asphalt Concrete Pavements*, Proceedings of 8th International Conference On Asphalt Pavements, University of Washington, Seattle, WA, pp. 673-692 (1997).
- [5] A. Abdulshafi and K. Majidzadeh, *Combo Viscoelastic-Plastic Modeling and Rutting of Asphaltic Mixtures*, Transportation Research Record 968, Transportation Research Board, National Research Council, Washington, D.C., pp. 19-31 (1984).
- [6] A. Sides, J. Uzan, and M. Perl, "A Comprehensive Visco-elastoplastic Characterization of Sand-Asphalt Under Compression and Tension Cyclic Loading", *ASTM Journal of Testing and Evaluation*, **13**, 49-59 (1985).
- [7] C.S. Desai and D. Zhang, "Viscoplastic Model for Geologic Materials with Generalized Flow Rule", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **11**, 603-620 (1987).
- [8] J.B. Sousa, S. Weissman, J. Sackman and C.L. Monismith, *A Nonlinear Elastic Viscous with Damage Model to Predict Permanent Deformation of Asphalt Concrete Mixtures*, Transportation Research Record 1384, Transportation Research Board, National Research Council, Washington, D.C., pp. 80-93 (1993).
- [9] D. Florea, "Associated Elastic/Viscoplastic Model for Bituminous Concrete", *International Journal of Engineering Science*, **32**(1), 79-86 (1994).
- [10] D. Florea, "Nonassociated Elastic/Viscoplastic Model for Bituminous Concrete", *International Journal of Engineering Science*, **32**(1), 87-93 (1994).
- [11] J.B. Sousa and S. Weissman, "Modeling Permanent Deformation of Asphalt Concrete Mixtures", *Journal Association of Asphalt Paving Technologists*, **63**, 224-257 (1994).
- [12] C.S. Desai, S. Somasundaram and G. Frantziskonis, "A Hierarchical Approach for Constitutive Modelling of Geologic Materials", *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **10**(3), 225-257 (1986).
- [13] C.S. Desai and D. Zhang, "Viscoplastic Model for Geologic Materials with Generalized

- Flow Rule”, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **11**, 603-620 (1987).
- [14] C.S. Desai, *Modeling and Testing: Implementation of Numerical Models and Their Application in Practice*, CISM Courses and Lectures, 311, Springer-Verlag, New York, pp. 1-168, 1990.
- [15] Y. Lu and P.J. Wright, “Numerical Approach of Visco-Elastoplastic Analysis for Asphalt Mixtures”, *Journal of Computers & Structures*, **69**, 139-147 (1998).
- [16] A.C. Seibi, M.G. Sharma, G.A. Ali and W.J. Kenis, *Constitutive Relations for Asphalt Concrete Under High Rates of Loading*, Transportation Research Record 1767, Transportation Research Board, National Research Council, Washington, D.C., pp. 111-119 (2001).
- [17] B. Huang, L. Mohamad and W. Wathugala, *Development of a Thermo-Viscoplastic Constitutive Model for HMA Mixtures*, Presented at the Association of Asphalt Paving Technologist 77th Annual Meeting (CD ROM), Colorado Springs, CO (2002).
- [18] J.J.L. Cela, “Material Identification Procedure for Elastoplastic Drucker Prager Model”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, **128**(5), 586-591(2002).
- [19] R. Lytton, *Characterizing Asphalt Pavements for Performance*, Transportation Research Record 1723, Transportation Research Board, National Research Council, Washington, D.C., pp. 5-16 (2000).
- [20] R.A. Schapery, *Models for Damage Growth and Fracture in Nonlinear Viscoelastic Particulate Composites*, Proceedings of the 9th U.S. National Congress of Applied Mechanics, ASME, pp. 237-245 (1982).
- [21] R.A. Schapery, *Nonlinear Constitutive Equations for Solid Propellant Based on a Work Potential Micromechanical Model*, Proceedings of JANNAF Structures and Mechanical Behavior Meeting, CPIA, Huntsville. AL. (1987).
- [22] S.W. Park, Y.R. Kim and R.A. Schapery, “A viscoelastic Continuum Damage Model and its Application to Uniaxial Behaviour of Asphalt Concrete”, *Mechanics of Materials*, **24**, 241-255 (1996).
- [23] H.J. Lee, J.S. Daniel and Y.R. Kim, “Continuum Damage Mechanics-Based Fatigue Model of Asphalt Concrete”, *Journal of Materials in Civil Engineering*, **12**(2), 104-113 (2000).
- [24] M.H. Sadd, Q. Dai, V. Parameswaran and A. Shukla, *Simulation of Asphalt Materials Using a Finite Element Micromechanical Model with Damage Mechanics*, Presented at the Transportation Research Board 82nd Annual Meeting (CD ROM), National Research Council, Washington, D.C. (2003).
- [25] C. Collop, A.T. Scarpas, C. Kasbergen and A. De Bondt, *Development and Finite Element Implementation of a Stress Dependent Elasto-Visco-Plastic Constitutive Model with Damage for Asphalt*, Presented at the Transportation Research Board 82nd Annual Meeting (CD ROM), National Research Council, Washington, D.C. (2003).
- [26] M.D. Snyder, *An Effective Solution Algorithm for Finite Element Thermo-Elastic-Plastic and Creep Analysis*, PhD Thesis, Massachusetts Institute Of Technology (1980).
- [27] M.D. Snyder and K.J. Bathe, “A Solution Procedure for Thermo-Elastic-Plastic and Creep Problems”, *Nuclear Eng. and Design*, **64**, 49-80 (1981)
- [28] P.M. Naghdi, *Stress-Strain Relations in Plasticity and Thermo-plasticity*, Proc. 2nd Symp. Naval Struc. Mech., Pergamon Press, New York, pp. 121-169 (1960).
- [29] Y.C. Fung, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1976).
- [30] L.E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall,

- Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1969).
- [31] A. Mendelson, *Plasticity: Theory and Application*, MacMillan, New York (1968).
- [32] R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford, England (1950).
- [33] D.C. Drucker, *A More Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Relations*, Proc. Ist. U.S. Natl. Congress Appl. Mech., pp. 478-491 (1952).
- [34] P.S. Symonds and N. Jones, "Impulsive Loading, of Fully Clamped Beams with Finite Plastic Deflections and Strain Rate Sensitivity", *Int. J. Mech. Sci.*, **14**, 49-69 (1972).
- [35] C.E. Pugh et al., *Currently Recommended Constitutive Equations for Inelastic Design Analysis of FFTF Components*, Report No. TM-3602, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tenn. (1972).
- [36] C.E. Pugh et al., *Interim Guidelines for Detailed Inelastic Analysis of High Temperature Reactor System Components*, Report No. ORNL-5014, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tenn. (1974).
- [37] I. Finnie, "Stress Analysis in the Presence of Creep", *Appl. Mech. Reviews*, **13**(10), 705-712 (1960).
- [38] I. Finnie and W.R. Heller, *Creep of Engineering Materials*, McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, London, England (1971).
- [39] R.K. Penny and D.L. Marriot, *Design for Creep*, McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, England (1971).
- [40] A.P. Borelli and O.M. Sidebottom, "Creep of Metals Under Multiaxial States of Stress", *Nuclear Engineering and Design*, **18**, 415-456 (1972).
- [41] B.O. Almroth, *In Constitutive Equations in Viscoplasticity: Computational and Engineering Aspects*, Stricklin J.A., and Saczalski K.J., AMD, A.S.M.E.: New York, NY, 1976, Vol. 20, pp. 201-211.
- [42] S.S. Hecker, *Experimental Studies of Yield Phenomena in Biaxially Loaded Metals*, Constitutive Equations in Viscoplasticity: Computational and Engineering Aspects, Stricklin, J.A. e Saczalski, K.J., (eds.), AMD-Vol. 20, pp. 1-33, A.S.M.E., New York (1976).
- [43] AA.VV., *Catalogo Prestazionale dei Manti Bituminosi Superficiali*, PRIN 2001, Università degli studi di Palermo – D.I.I.V., Università degli Studi della Basilicata – D.A.P.I.T, Università degli Studi di Bologna – D.I.S.T.A.R.T, Parte II, p. 2-11 (2001).
- [44] K.H. Lux, and S. Heusermann, *A Creep Test on Rock Salt with Changing Load as a Basis for the Verification of Theoretical Material Laws*, Sixth International Symposium on Salt, Vol. 1, pp. 417-435 (1983).
- [45] S.M.J.G. Erkens, *Asphalt Concrete Response (ACRe) – Determination Modelling and Prediction*, PhD Thesis, Delft University of Technology, Delft University Press (2002).
- [46] E. Masad, et al., *Evaluation of Aggregate Characteristics Affecting HMA Concrete Performance*", Final Report of ICAR 203 Project, The Aggregate Foundation of Technology, Research, and Education, VA, pp. 204 (2003).
- [47] L. Tashman – "Microstructural Viscoplastic Continuum Model for Asphalt Concrete", PhD Thesis, Department of Civil Engineering Texas A&M University, 2003.
- [48] L. Tashman, E. Masad, H. Zbib, D. Little and K. Kaloush, "Microstructural Viscoplastic Continuum Model for Permanent Deformation in Asphalt Pavements", *J. Engrg. Mech.* **131**(1), 48-57 (2005).
- [49] R.Y. Kim, T.Y. Yun and M. Gudatti, *Modeling of the Behavior of Hot Mix Asphalt in Compression*, TRB 85th Annual Meeting Compendium of Papers CD-ROM, Transportation Research Board, Washington DC, United States (2006).

- [50] E. Masad, , L. Tashman, , D. Little and H. Zbib, “Viscoplastic Modeling of Asphalt Mixes with the Effects of Anisotropy, Damage and Aggregate Characteristics”, *Journal of Mechanics of Materials*, **37**, 1242-1256 (2005).
- [51] R. Bandyopadhyaya, A. Das and S. Basu, “Numerical Simulation of Mechanical Behaviour of Asphalt Mix”, *Construction and Building Materials*, **22**, 1051-1058 (2008).
- [52] J.M. González, J. Miquel Canet, S. Oller and R. Mirò, “A Viscoplastic Constitutive Model with Strain Rate Variables for Asphalt Mixtures – Numerical Simulation”, *Computational Material Science*, **38**, 543-560 (2007).